

Question de cours

f et G étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$, le produit fG l'est aussi et on peut utiliser l'intégration par parties sur tout intervalle $[1, A]$, $A > 0$.

$$\int_1^A fg = f(A)G(A) - f(1)G(1) - \int_1^A f'G$$

D'une part, comme G est bornée et f admet pour limite 0 en $+\infty$, on a $\lim_{A \rightarrow +\infty} f(A)G(A) = 0$.

D'autre part, comme f est décroissante, $-f' \geq 0$ et $0 \leq |f'G| = (-f')G \leq M|f'| = -Mf'$ où M est un majorant de G . Ceci montre que pour $1 \leq x < y$, on a

$$\int_x^y |f'G| \leq M(f(y) - f(x)) \xrightarrow{x, y \rightarrow +\infty} 0$$

Ainsi, d'après le critère de Cauchy pour les intégrales généralisées, l'intégrale de $-f'G$ est absolument convergente sur $[1, +\infty[$, donc convergente vers $\int_1^{+\infty} -f'G$.

En conclusion, l'intégrale généralisée de fg sur $[1, +\infty[$ est convergente vers $-f(1)G(1) + \int_1^{+\infty} -f'G$.

Exercice

1. La fonction $x \mapsto x^4 + 1$ est paire donc le polynôme $x^4 + 1$ se factorise sous la forme $(x^2 + ax + b)(x^2 - ax + b)$. En développant, et en identifiant les coefficients, on obtient : $a^2 = 2b$ et $b^2 = 1$.

On résout et on a $b = 1$, $a = \pm\sqrt{2}$. Ceci donne alors

$$x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$$

Les deux polynômes $x^2 + \sqrt{2}x + 1$ et $x^2 - \sqrt{2}x + 1$ sont irréductibles sur $\mathbb{R}$ (leurs Δ valent -2).

2. La fraction rationnelle R se décompose en éléments simples sous la forme

$$R(x) = \frac{1-x^2}{1+x^4} = \frac{ax+b}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{cx+d}{x^2-\sqrt{2}x+1}$$

Comme $R(x) = R(-x)$, on en déduit que $c = -a$ et $d = b$.

En évaluant en $x = 0$, on obtient $1 = 2b$, et donc $b = \frac{1}{2}$.

En évaluant en $x = \sqrt{2}$, on obtient $-\frac{1}{5} = \frac{a\sqrt{2}}{5} + \frac{1}{10} - a\sqrt{2} + \frac{1}{2}$,

et donc $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ceci donne alors la décomposition suivante

$$R(x) = \frac{1-x^2}{1+x^4} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} - \frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1} \right)$$

3. Pour trouver une primitive de R , on remarque que la décomposition trouvée à la question 2 est de la forme

$$R(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{u'(x)}{u(x)} - \frac{v'(x)}{v(x)} \right) \quad \text{où } u(x) = x^2 + \sqrt{2}x + 1 \text{ et } v(x) = x^2 - \sqrt{2}x + 1.$$

Ainsi, on a

$$\int R(x) dx = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{u(x)}{v(x)} \right| + c.$$

$$\text{C'est-à-dire: } \int R(x) dx = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left(\frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right) + c.$$

La primitive de R qui s'annule en 0 vaut donc

$$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left(\frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right).$$

Problème

1(a) On sait que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$, ce qui montre que g définie par $g(t) = \frac{\sin t}{t}$ si $t > 0$, $g(0) = 1$ est continue sur $[0, \infty[$.

(b) En posant $x_k = \frac{k}{n}$, $0 \leq k \leq n$ et $\xi_k = \frac{k}{n}$, $1 \leq k \leq n$, on remarque que

$$a_n = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) g(\xi_k).$$

Comme g est continue sur $[0, 1]$ (car continue sur $[0, +\infty[$) et que $\{x_k, 0 \leq k \leq n\}$ est une subdivision (régulière) de $[0, 1]$, les points ξ_k étant adaptés à cette subdivision, on en déduit que (g est intégrable au sens de Riemann sur $[0, 1]$):

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 g(t) dt.$$

2-3 : voir corrigé du partiel