TD1 - Intégrales de Riemann, méthodes d'intégration

Exercice 1 (Sommes de Riemann)**.** Montrer que les limites suivantes existent, puis les calculer :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right), \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}, \quad \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Exercice 2 (Approximation d'intégrales)**.** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. On note $I_R^{[a,b]} = (b-a)f(a)$ (R comme "rectangle"), $I_M^{[a,b]} = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ (M comme "médian"), $I_T^{[a,b]} = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$ (T comme "trapèze") et $I_S^{[a,b]} = \frac{b-a}{6}\left(f(a)+f(b)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$ (S comme "Simpson").

Montrer que

i) si f est de classe $\mathscr{C}^1$, alors $\left|\int_a^b f - I_R^{[a,b]}\right| \leq \frac{(b-a)^2}{2}\sup_{[a,b]}|f'|$;

ii) si f est de classe $\mathscr{C}^2$, alors $\left|\int_a^b f - I_T^{[a,b]}\right| \leq \frac{(b-a)^3}{12}\sup_{[a,b]}|f''|$;

iii) si f est de classe $\mathscr{C}^2$, alors $\left|\int_a^b f - I_M^{[a,b]}\right| \leq \frac{(b-a)^3}{24}\sup_{[a,b]}|f''|$;

iv) si f est de classe $\mathscr{C}^4$, alors $\left|\int_a^b f - I_S^{[a,b]}\right| \leq \frac{(b-a)^5}{2880}\sup_{[a,b]}|f^{(iv)}|$.

Pour une fonction f régulière sur $[0,1]$ et une subdivision de longueur $\frac{1}{n}$, donner une méthode qui permet d'approcher $\int_0^1 f$ avec une erreur bornée comme $\frac{1}{n^4}$.

Exercice 3 (Calcul de primitives)**.** Calculer, par des changements de variables, les primitives suivantes :

1. $\int \cos(3x)\,\mathrm{d}x$;
2. $\int e^{-x}\,\mathrm{d}x$;
3. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-4x}}$;
4. $\int \frac{\mathrm{d}x}{5x-2}$;
5. $\int \frac{\mathrm{d}x}{5+3x^2}$;
6. $\int \frac{3x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-4x^2}}$;
7. $\int \frac{3\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-4x^2}}$;
8. $\int \cos^4(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 4 (Changement de variables)**.** Calculer, à l'aide des changements de variables proposés, les primitives suivantes :

1. $\int \frac{\sqrt{x^3+1}}{x}\,\mathrm{d}x$, avec $x^3+1=t^2$;
2. $\int \frac{1}{x(x^3+1)^2}\,\mathrm{d}x$, avec $t = x^3+1$;
3. $\int \frac{e^x+1}{e^{2x}+e^x+1}\,\mathrm{d}x$, avec $t = e^x$;
4. $\int \frac{1-\cos 2x}{\sin 3x}\,\mathrm{d}x$, avec $t=\cos x$;
5. $\int \frac{1}{\cos x+\cos 3x}\,\mathrm{d}x$, avec $t = \sin x$;
6. $\int \frac{1}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x$, avec $t = \tan\frac{x}{2}$;
7. $\int \frac{1}{(2+\cos x)^2}\,\mathrm{d}x$, avec $t=\tan\frac{x}{2}$;
8. $\int (x^2+4)^{-\frac{5}{2}}\,\mathrm{d}x$ avec $t = \operatorname{argsh}\frac{x}{2}$;
9. $\int (4-x^2)^{-\frac{5}{2}}\,\mathrm{d}x$, avec $t = \arcsin\frac{x}{2}$;
10. $\int (x^2-4)^{-\frac{5}{2}}\,\mathrm{d}x$, avec $t = \operatorname{argch}\frac{x}{2}$.

Exercice 5 (Intégration par parties)**.** Calculer, en intégrant par parties, les primitives suivantes :

1. $\int x\cos(x)\,\mathrm{d}x$
2. $\int x^2 e^x\,\mathrm{d}x$
3. $\int \ln(x)\,\mathrm{d}x$
4. $\int x^2\ln(x)\,\mathrm{d}x$
5. $\int e^x\cos(x)\,\mathrm{d}x$
6. $\int x\arctan(x)\,\mathrm{d}x$
7. $\int \arcsin^2(x)\,\mathrm{d}x$
8. $\int \sin(x)\mathrm{sh}\,(x)\,\mathrm{d}x$