TD3 - Intégrales dépendant d'un paramètre

Exercice 1 (Sur un intervalle borné)**.** Étudier la fonction définie pour $x > 0$ par

$$F(x) = \int_0^1 \frac{x}{x^3 + t^3}\,\mathrm{d}x.$$

On étudiera en particulier la continuité et la dérivabilité de F sur $]0,+\infty[$. La fonction F est-elle prolongeable par continuité en 0 ? L'intégrale de F sur $]0,+\infty[$ est-elle convergente ?

Exercice 2 (Exemple de calcul)**.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$F(x) = \int_0^\infty \cos(2xt)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $F(x)$ est une intégrale convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Que vaut $F(0)$?
3. Montrer que F est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
4. Exprimer F' en fonction de F. En déduire une expression de $F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 (Fonction Γ)**.** Pour tout $x > 0$, on pose

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $\Gamma(x)$ est une intégrale absolument convergente pour tout $x > 0$.
2. Calculer $\Gamma(1)$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, trouver une relation de récurrence entre $\Gamma(n+1)$ et $\Gamma(n)$. En déduire l'expression de $\Gamma(n)$ pour $n \geq 1$ entier.
4. Montrer que Γ est une fonction continue et dérivable sur $]0,+\infty[$. Donner une expression de $\Gamma'(x)$ pour $x > 0$.
5. Montrer que la fonction Γ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.

Exercice 4 (Transformée de Fourier de la gaussienne)**.** Pour $x \in \mathbb{R}$, on note

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $F(x)$ est une intégrale absolument convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Calculer $F(0)$.
3. Montrer que F est une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
4. Donner une expression de $F'(x)$ en fonction de $F(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
5. En déduire l'expression de F à l'aide de fonctions usuelles.