Université d'Aix-Marseille **Année 2017-2018**
L2 Mathématiques Générales **Analyse 2**

Examen partiel

Vendredi 27 octobre 2017

Exercice 1 (Questions de cours)**.** Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Dans le cas où elles sont fausses, comment modifier l'énoncé (hypothèse et/ou conclusion) afin d'obtenir un résultat correct ?

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles : $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $n \geq 0$.

1. On suppose que la suite des sommes partielles $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Alors la série $\sum a_n$ est convergente.
2. On suppose que $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Alors la série $\sum a_n$ est convergente.
3. On suppose que $n^2 a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Alors la série $\sum a_n$ est convergente.
4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles vérifiant $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\sum v_n$ est convergente. Alors $\sum u_n$ est convergente.
5. Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs qui tend vers 0 à l'infini. Alors la série $\sum(-1)^n\varepsilon_n$ est convergente.
6. Une suite de fonctions qui converge simplement sur un intervalle vers une fonction continue sur cet intervalle est uniformément convergente.

Exercice 2 (Calcul de sommes de séries)**.**

1. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$.
   (a) Rappeler pourquoi $\sum z^n$ est une série absolument convergente et donner la valeur de sa somme $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$.
   (b) Montrer que la série de terme général $(nz^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est absolument convergente. On note $T(z)$ sa somme : $T(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nz^n$.
   (c) Montrer que $(1-z)T(z) = S(z) - 1$. En déduire la valeur de $T(z)$ en fonction de z.

   Attention ! On justifiera tous les calculs faits sur les sommes infinies.
2. Soit $w \in \mathbb{C}$.
   (a) Montrer que la série de terme général $\left(\frac{w^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est absolument convergente.
   (b) Que vaut $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$?
3. Rappeler la formule du produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.
4. En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k(n-k)!}\Big)$.

Exercice 3 (Séries de Riemann)**.** Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on note $a_{n,\alpha} = \frac{1}{n^\alpha}$ pour tout $n \geq 1$.

1. Rappeler pour quelle(s) valeur(s) de α la série $\sum a_{n,\alpha}$ est convergente et pour quelle(s) valeur(s) elle est divergente.

2. Montrer que pour $\alpha > 1$, on a pour tout $n \geq 2$
$$\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leq \frac{\alpha-1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$
On pourra penser à comparer $\frac{1}{n^\alpha}$ avec une intégrale d'une fonction bien choisie sur $[n, n+1]$ et sur $[n-1, n]$.

3. On note pour $n \geq 1$, $R_{n,\alpha} = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=n}^{N} a_{k,\alpha}$ si cette limite existe. En utilisant la question précédente, montrer que si $\alpha > 1$, alors $R_{n,\alpha}$ existe pour tout $n \geq 1$ et
$$\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \leq R_{n,\alpha} \leq \frac{1}{(\alpha-1)(n-1)^{\alpha-1}}, \qquad n \geq 2.$$

4. En déduire, pour $\alpha > 1$, un équivalent de $R_{n,\alpha}$ lorsque n tend vers l'infini.