Université d'Aix-Marseille **Année 2017-2018**
L2 Mathématiques Générales **Analyse 2**

Examen partiel - Corrigé

Vendredi 27 octobre 2017

Exercice 1 (Questions de cours)**.** Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Dans le cas où elles sont fausses, comment modifier l'énoncé (hypothèse et/ou conclusion) afin d'obtenir un résultat correct ?

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles : $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$, $n \geq 0$.

1. On suppose que la suite des sommes partielles $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Alors la série $\sum a_n$ est convergente.

   Réponse : Ceci est faux comme le montre par exemple le cas $a_n = (-1)^n$: $A_n = 1$ si n est pair et $A_n = 0$ si n est impair, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée, mais ne converge pas. On peut changer l'énoncé par exemple en supposant que le terme général de la série est positif : une série à termes positifs dont les sommes partielles sont bornées est convergente.

2. On suppose que $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Alors la série $\sum a_n$ est convergente.

   Réponse : Ceci est faux comme le montre le cas $a_n = \frac{1}{n+1}$. Un théorème du cours dit que "si une série est convergente, alors son terme général tend vers 0 à l'infini".

3. On suppose que $n^2 a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Alors la série $\sum a_n$ est convergente.

   Réponse : Ceci est vrai : l'hypothèse $n^2 a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ revient à dire que $a_n \sim \frac{1}{n^2}$ à l'infini. Comme $\frac{1}{n^2}$ est le terme général d'une série convergente (c'est une série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha = 2 > 1$), on en déduit que $\sum a_n$ est convergente.

4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles vérifiant $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\sum v_n$ est convergente. Alors $\sum u_n$ est convergente.

   Réponse : Ceci est faux. C'est vrai si on ajoute l'hypothèse que les séries sont à termes positifs.

5. Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs qui tend vers 0 à l'infini. Alors la série $\sum(-1)^n \varepsilon_n$ est convergente.

   Réponse : Ceci est faux. C'est vrai si on ajoute l'hypothèse que la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (c'est le théorème des séries alternées).

6. Une suite de fonctions qui converge simplement sur un intervalle vers une fonction continue sur cet intervalle est uniformément convergente.

   Réponse : Ceci est faux. Un théorème du cours dit que "la limite uniforme d'une suite de fonctions continues sur un intervalle est continue sur cet intervalle".

Exercice 2 (Calcul de sommes de séries)**.** 1. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$.

(a) Rappeler pourquoi $\sum z^n$ est une série absolument convergente et donner la valeur de sa somme $S(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$.

(b) Montrer que la série de terme général $(nz^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est absolument convergente. On note $T(z)$ sa somme : $T(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$.

(c) Montrer que $(1-z)T(z) = S(z) - 1$. En déduire la valeur de $T(z)$ en fonction de z.

Attention ! On justifiera tous les calculs faits sur les sommes infinies.

2. Soit $w \in \mathbb{C}$.

   (a) Montrer que la série de terme général $\left(\frac{w^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est absolument convergente.

   (b) Que vaut $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$?

3. Rappeler la formule du produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.

4. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} \tfrac{k}{2^k(n-k)!}\Big)$.

Corrigé :

1. $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$.

   (a) Comme $|z| < 1$, peut calculer explicitement les sommes partielles de la série proposée (c'est une série géométrique) et on a

$$\sum_{n=0}^{N} z^n = \frac{1-z^{N+1}}{1-z} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{1-z} = S(z).$$

   Cette série est de plus absolument convergente : il suffit de reprendre le même raisonnement en remplaçant z par $|z|$.

   (b) Si $z = 0$, la série de terme général $(nz^n)_n$ est convergente (le terme général est nul pour tout n). Si $z \neq 0$, alors $nz^n \neq 0$ pour tout $n \geq 1$ et on a $\left|\frac{(n+1)z^{n+1}}{nz^n}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} |z| < 1$. D'après le critère de d'Alembert, on en déduit donc que la série de terme général $(nz^n)_n$ est absolument convergente pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$.

   (c) Pour cette question, on ne fait des calculs que sur des sommes finies (des sommes partielles), et on déduira le résultat demandé par passage à la limite. En notant $S_N(z) = \sum_{n=0}^{N} z^n$ et $T_N(z) = \sum_{n=0}^{N} nz^n$ pour $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
(1-z)T_N(z) =& \sum_{n=1}^{N} nz^n - \sum_{n=0}^{N} nz^{n+1} \\
& \text{on peut faire partir la somme de 0 ou de 1 puisque le premier terme est nul} \\
=& \sum_{n=1}^{N} nz^n - \sum_{n'=1}^{N+1} (n'-1)z^{n'} \\
& \text{on a fait le changement d'indice } n' = n+1 \text{ dans la deuxième somme} \\
=& \sum_{n=1}^{N} \big(n-(n-1)\big)z^n - Nz^{N+1} \\
& \text{on a regroupé tous les termes de même puissance de } z \text{ et on a gardé le dernier} \\
& \text{terme en } z^{N+1} \text{ qui n'apparaît que dans la deuxième somme} \\
=& \big(S_N(z) - 1\big) - Nz^{N+1} \xrightarrow[N\to\infty]{} S(z) - 1 \\
& \text{car } \textstyle\sum_{n=1}^{N} z^n = S_N(z) - 1 \text{ et } Nz^{N+1} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 \text{ pour } |z| < 1.
\end{aligned}$$

   Comme $T_N(z) \xrightarrow[N\to\infty]{} T(z)$, on en déduit l'égalité demandée : $(1-z)T(z) = S(z) - 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$.

2. Soit $w \in \mathbb{C}$.

   (a) Si $w = 0$, alors le terme général de la série $\sum \frac{w^n}{n!}$ est toujours nul : la série est donc convergente. Si $w \neq 0$, alors $\frac{w^n}{n!} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on a

   $$\left| \frac{\frac{w^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{w^n}{n!}} \right| = \frac{|w|}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 < 1.$$

   D'après le critère de d'Alembert, on en déduit que la série de terme général $\left(\frac{w^n}{n!}\right)_n$ est absolument convergente pour tout $w \in \mathbb{C}$.

   (b) On sait que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e = \exp(1)$.

3. On suppose que $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont deux séries absolument convergentes vers A, resp. B. Alors $\sum c_n$, où $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, converge absolument vers le produit AB.

4. On remarque que si $a_n = \frac{n}{2^n}$ et $b_n = \frac{1}{n!}$, alors, avec les notations de la question précédente,

   $$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k (n-k)!}.$$

   D'après la question 1, $\sum a_n$ converge vers $T(\frac{1}{2})$ et d'après 2(b), $\sum b_n$ converge vers e. D'après 1(c), on sait que $(1 - \frac{1}{2})T(\frac{1}{2}) = S(\frac{1}{2}) - 1 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1$, ce qui donne finalement $T(\frac{1}{2}) = 2$ et

   $$\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k (n-k)!} \Big) = 2e.$$

Exercice 3 (Séries de Riemann)**.** Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on note $a_{n,\alpha} = \frac{1}{n^\alpha}$ pour tout $n \geq 1$.

1. Rappeler pour quelle(s) valeur(s) de α la série $\sum a_{n,\alpha}$ est convergente et pour quelle(s) valeur(s) elle est divergente.

2. Montrer que pour $\alpha > 1$, on a pour tout $n \geq 2$

   $$\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leq \frac{\alpha - 1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

   On pourra penser à comparer $\frac{1}{n^\alpha}$ avec une intégrale d'une fonction bien choisie sur $[n, n+1]$ et sur $[n-1, n]$.

3. On note pour $n \geq 1$, $R_{n,\alpha} = \displaystyle\lim_{N\to\infty} \sum_{k=n}^{N} a_{k,\alpha}$ si cette limite existe. En utilisant la question précédente, montrer que si $\alpha > 1$, alors $R_{n,\alpha}$ existe pour tout $n \geq 1$ et

   $$\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \leq R_{n,\alpha} \leq \frac{1}{(\alpha-1)(n-1)^{\alpha-1}}, \qquad n \geq 2.$$

4. En déduire, pour $\alpha > 1$, un équivalent de $R_{n,\alpha}$ lorsque n tend vers l'infini.

Corrigé :

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a vu en cours (séries de Riemann) que la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si, et seulement si, $\alpha > 1$.

2. Pour $\alpha > 1$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est décroissante sur $[1, +\infty[$. On a alors pour tout $n \geq 2$

$$\frac{1}{1-\alpha}\big((n+1)^{1-\alpha} - n^{1-\alpha}\big) = \int_n^{n+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1-\alpha}\big(n^{1-\alpha} - (n-1)^{1-\alpha}\big),$$

ce qui donne la double inégalité cherchée.

3. Lorsque $\alpha > 1$, $R_{n,\alpha}$ est le reste de la série convergente $\sum \frac{1}{n^\alpha}$. D'après la question précédente on a, en sommant de $n \geq 2$ à $N \geq n$

$$\frac{1}{\alpha-1}\sum_{k=n}^{N}\Big(\frac{1}{k^{\alpha-1}} - \frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}}\Big) \leq \sum_{k=n}^{N} a_{k,\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1}\sum_{k=n}^{N}\Big(\frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^{\alpha-1}}\Big).$$

On remarque que les deux sommes à gauche et à droite des inégalités sont des sommes télescopiques que l'on peut donc facilement calculer :

$$\sum_{k=n}^{N}\Big(\frac{1}{k^{\alpha-1}} - \frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}}\Big) = \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}} \quad \text{et} \quad \sum_{k=n}^{N}\Big(\frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^{\alpha-1}}\Big) = \frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{N^{\alpha-1}}.$$

En prenant la limite lorsque N tend vers l'infini (les inégalités larges sont conservées), on obtient alors pour tout $n \geq 2$

$$\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \leq R_{n,\alpha} \leq \frac{1}{(\alpha-1)(n-1)^{\alpha-1}}$$

car $\frac{1}{N^{\alpha-1}} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$ et $\frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$.

4. Lorsque n tend vers l'infini, $\frac{1}{(\alpha-1)(n-1)^{\alpha-1}}$ est équivalent à $\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$. En effet, on a

$$\frac{\frac{1}{(\alpha-1)(n-1)^{\alpha-1}}}{\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}} = \Big(\frac{n}{n-1}\Big)^{\alpha-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

Ceci donne un équivalent de $R_{n,\alpha}$ lorsque n tend vers l'infini : $R_{n,\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.