Année universitaire 2016-2017

Site : ☐ Luminy ☐ St-Charles ☒ St-Jérôme ☐ Cht-Gombert ☐ Aix-Montperrin ☐ Aubagne-SATIS

Sujet de : ☒ 1er semestre ☐ 2ème semestre ☐ Session 2 Durée de l'épreuve : 2h

Examen de : L1 Nom du diplôme : Licence SPI

Code du module : SPI1U1TJ Libellé du module : Courbes et fonctions

Calculatrices autorisées : NON Documents autorisés : NON

Exercice 1 (Nombres complexes)**.** Soit $w = 2 + 2i \in \mathbb{C}$. Mettre w sous forme trigonométrique, puis résoudre l'équation $z^3 = w$ dans $\mathbb{C}$ (on doit trouver trois solutions).

Exercice 2 (Géométrie plane)**.** Soit Γ l'ensemble des points (x, y) du plan vérifiant

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 = 0.$$

Déterminer la forme géométrique de Γ. Peut-on représenter Γ comme une courbe paramétrée ? Si oui, donner une paramétrisation de Γ.

Exercice 3 (Géométrie dans l'espace)**.** On considère les deux droites D_1 et D_2 déterminées par les équations cartésiennes suivantes :

$$D_1 : \left\{ \begin{array}{l} x + y - z + 2 = 0 \\ x + y + z + 1 = 0 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad D_2 : \left\{ \begin{array}{l} 3x - y + 2z - 7 = 0 \\ x - y = 0 \end{array} \right. .$$

Remarque : *Le but de l'exercice est de trouver des équations cartésiennes de la perpendiculaire commune à D_1 et D_2 ainsi que la distance entre ces deux droites. On propose les questions suivantes pour vous guider, mais toutes les méthodes arrivant aux bonnes réponses aux questions* 3.(b) *et* 4 *seront notées avec le maximum des points.*

1. Donner un vecteur directeur $\vec{v}_1$ de D_1 et un vecteur directeur $\vec{v}_2$ de D_2.
2. En déduire un vecteur directeur $\vec{n}$ de D, la perpendiculaire commune à D_1 et D_2.
3. (a) Trouver des équations paramétriques de D (on précisera en particulier les coordonnées des points A, intersection entre D_1 et D et B, intersection entre D_2 et D).

   (b) En déduire des équations cartésiennes de D.
4. Déterminer la distance entre les deux droites D_1 et D_2.

Exercice 4 (Courbes et fonctions)**.** On considère la courbe paramétrée $\mathscr{C}$ définie par

$$\begin{array}{rccc} M & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & t & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{l} x(t) = \sin 3t \\ y(t) = \sin 2t \end{array} \right. . \end{array}$$

1. Montrer que $M(t + 2\pi) = M(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Que peut-on en déduire sur la courbe $\mathscr{C} = \{M(t), t \in \mathbb{R}\}$?
2. Déterminer $M(-t)$ en fonction de $M(t)$: comment déduit-on géométriquement l'un de l'autre ?
3. Déterminer $M(\pi - t)$ en fonction de $M(t)$: comment déduit-on géométriquement l'un de l'autre ?
4. Étudier les deux fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$. On précisera en particulier là où les fonctions sont dérivables et leurs sens de variations.
5. Donner l'allure du support de la courbe $\mathscr{C}$. On marquera en particulier les points de paramètres $t = 0$, $t = \frac{\pi}{6}$, $t = \frac{\pi}{4}$, $t = \frac{\pi}{3}$ et $t = \frac{\pi}{2}$ ainsi que leurs tangentes.