TD 1 – Séries numériques dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Exercice 1 (Critères de comparaison)**.** Étudier la nature des séries suivantes :

$$\sum \frac{1}{n(n+\log n)}, \quad \sum \frac{1}{n(n+1)(n+2)}, \quad \sum \frac{\sqrt{n^2+1}}{n},$$

$$\sum \frac{1}{10n+1}, \quad \sum \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right), \quad \sum \frac{e^{in}}{2^n-n}, \quad \sum \frac{\cos(n\alpha)}{2^n} \text{ avec } \alpha\in\mathbb{R},$$

$$\sum \sin\Big(\frac{a}{n}\Big), \ \sum \tan\Big(\frac{a}{n}\Big), \ \sum \left[\tan\Big(\frac{a}{n}\Big) - \sin\Big(\frac{a}{n}\Big)\right]^{1/2}, \ \sum \ln\left|\cos\left(\frac{a}{n}\right)\right| \text{ avec } a>0$$

$$\sum 2^n \sin\frac{\pi}{3^n}, \ \sum 3^n \sin\frac{\pi}{2^n}, \ \sum \frac{z^n}{n^2} \text{ selon les valeurs de } z\in\mathbb{C}.$$

Exercice 2 (Critères de Cauchy et de d'Alembert)**.** Étudier la nature des séries suivantes :

$$\sum \Big(\frac{4k+5}{5k+3}\Big)^k, \quad \sum \frac{n^3}{2^n}, \quad \sum \frac{2n-1}{2^{n/2}}, \quad \sum \frac{n!}{n^n},$$

$$\sum u_k \text{ où } u_k = \frac{2^n}{3^n} \text{ si } k=2n \text{ et } u_k = \frac{2^n}{3^{n+1}} \text{ si } k=2n+1, \quad \sum \frac{1}{\big(\ln(n+1)\big)^n}.$$

Exercice 3 (Intégrales généralisées et séries)**.**

1. Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont donnés par

$$u_n = \sqrt{\frac{n^5\log n}{n^8+\cos n}}, \quad u_n = \frac{\log n}{n^{5/4}}, \quad u_n = \frac{1}{n\log n + \sqrt{(\ln n)^3}}.$$

2. Montrer que la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha + (-1)^n}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1/2$.

3. *Séries de Bertrand.* Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$, avec $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, converge si, et seulement si, ($\alpha>1$, $\forall\beta\in\mathbb{R}$) ou ($\alpha=1$ et $\beta>1$). (cf. la comparaison avec les intégrales généralisées de Bertrand.)

Exercice 4 (Séries alternées ou à termes quelconques)**.** Étudier la convergence des séries suivantes, préciser s'il s'agit de convergence absolue, de semi-convergence ou de divergence.

$$\sum \frac{(-1)^n}{(2n-1)^3}, \quad \sum (-1)^n\frac{n+1}{n}, \quad \sum \frac{(-1)^n}{n^2+\ln n}, \quad \sum \frac{(-1)^n}{n-\ln n},$$

$$\sum \frac{e^{in\theta}}{\ln n}, \quad \sum \frac{\cos n}{n+\cos n}, \quad \sum \frac{\cos(n\theta)}{\sqrt{n}}, \text{ avec } \theta\in\mathbb{R}.$$

Exercice 5 (Suites et séries)**.** Soit $0 < u_0 \leq \pi/2$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_{n+1} = \sin u_n$, $n\geq 0$. Le but de cet exercice est de déterminer la vitesse de convergence de cette suite.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

2. En utilisant le développement limité de la fonction sinus au voisinage de 0, montrer que $\dfrac{1}{u_{n+1}^2}-\dfrac{1}{u_n^2}\sim\dfrac{1}{3}$ pour $n\to+\infty$.
3. En déduire que $u_n\sim\sqrt{\dfrac{3}{n}}$ pour $n\to+\infty$. On pourra utiliser la convergence au sens de Cesàro (voir TD 0).

Exercice 6 (Développement asymptotique de la série harmonique)**.** On note $H_n=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ la somme partielle d'ordre $n\geq 1$ de la série harmonique.

1. Rappeler pourquoi la série $\sum\frac{1}{n}$ diverge.
2. On pose $u_n=H_n-\ln n$, $n\geq 1$. Montrer que $\sum(u_{n+1}-u_n)$ et donc que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge. On notera γ sa limite (appelée constante d'Euler ; cf. TD 0).
3. En déduire que $H_n=\ln n+\gamma+o(1)$ pour $n\to+\infty$.
   On pose $v_n=H_n-\ln n-\gamma$.
4. En étudiant la série de terme général $v_{n+1}-v_n$, montrer que $v_n\sim\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$ pour $n\to+\infty$.
5. Montrer que $\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}\leq\frac{1}{k^2}\leq\int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$, pour tout $k\geq 2$.
6. En déduire un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$ et donc que $H_n=\ln n+\gamma+\frac{1}{2n}+O\big(\frac{1}{n^2}\big)$ pour $n\to+\infty$.

Exercice 7 (Estimation de la somme d'une série numérique)**.** Dans cet exercice, on donne quelques techniques pour approcher la somme de séries numériques convergentes à une précision ϵ donnée.

1. On considère la série numérique de terme général $u_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n}$, $n\geq 1$. Combien faut-il sommer de termes afin d'obtenir une valeur de la somme S de $\sum u_n$ à $1/10$ près.
2. On considère la série numérique de terme général $u_n=\frac{1}{n^n}$. En vérifiant que pour tout $p>n$ on a $u_p\leq\frac{1}{(n+1)^p}$, donner une valeur de la somme S de $\sum u_n$ à $1/100$ près.
3. On considère la série numérique de terme général $u_n=\frac{1}{n!}$. En remarquant que $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{(n+1)}$, montrer que $|S-S_n|\leq\frac{1}{n\cdot n!}$ et donner une approximation de $\sum u_n$ à $1/100$ près.
4. On considère la série numérique de terme général $u_n=\frac{z^n}{n}$ avec $|z|<1$. En remarquant que $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n}{(n+1)}z$, montrer que $|S-S_n|\leq\frac{|u_{n+1}|}{1-|z|}$ et donner une approximation de $\sum u_n$ à $1/100$ près.
5. On considère la série numérique de terme général $u_n=\frac{1}{n^2}$, $n\geq 1$. Montrer que pour tout $n\geq 1$, on a $|S-S_n|\leq\int_n^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$. En déduire une approximation de $\sum u_n$ à $1/100$ près.
6. *Encadrement du reste d'une série convergente par des intégrales généralisées.* Pour $a\in\mathbb{R}$, on considère $f:[a,+\infty[\longrightarrow[0,+\infty[$ une fonction positive et décroissante telle que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, et donc la série $\displaystyle\sum_{n\geq a}f(n)$ converge aussi. Montrer qu'on a l'encadrement du reste ci-dessous pour tout entier $n\geq a$:
$$\int_{n+1}^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t\leq R_n=S-S_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}f(k)\leq\int_n^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t.$$
   Ce résultat donne donc une estimation de l'erreur R_n commise quand on approche la somme S de la série par la somme partielle S_n au rang n.