TD 2 – Suites de fonctions

Exercice 1 (Convergence simple et uniforme de suites de fonctions)**.** Étudier la convergence simple et uniforme sur I (ou sur $J \subset I$ à déterminer) des suites de fonctions suivantes :

1. $I = \mathbb{R}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+n^2}}$, $n \geq 1$; $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{n^2}{x^2+n^2}$;
2. $I = \mathbb{R}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto nxe^{-n^2x^2}$, $n \geq 0$;
3. $I = [0, +\infty[$, $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{\sin nx}{nx}$ si $x > 0$ et $f_n(0) = 1$ pour tout $n \geq 1$;
4. $I = [0, +\infty[$, $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(nx)\, e^{-nx}$, $n \geq 0$.

Exercice 2 (Intégration)**.**

1. (a) Trouver la limite (si elle existe), lorsque n tend vers l'infini, de $\displaystyle\int_0^1 \frac{n^2}{x^2+n^2}\, \mathrm{d}x$.
   (b) Trouver la limite (si elle existe), lorsque n tend vers l'infini, de $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{n^2}{x^2+n^2}\, \mathrm{d}x$. Retrouver un résultat de l'exercice précédent.
2. Soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = n^2x(1-nx)$ si $x \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$ et $f_n(x) = 0$ sinon.
   (a) Étudier la limite simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Calculer $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\, \mathrm{d}x$. La convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle uniforme sur $[0,1]$?
   (c) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur l'intervalle $[a, 1]$ pour tout $a \in]0, 1[$.
3. On note $f_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$.
   (a) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]-1, 1[$ vers une fonction f que l'on déterminera. La convergence est-elle uniforme ? Sur quel(s) intervalle(s) ?
   (b) Calculer $\displaystyle\int_{-1}^0 f_n(x)\, \mathrm{d}x$. Comparer (si cela est possible) avec $\displaystyle\int_{-1}^0 f(x)\, \mathrm{d}x$.
   (c) Rappeler pourquoi la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente et déduire sa valeur de ce qui précède.

Exercice 3 (Escalier du diable de Cantor)**.** On considère la suite de fonctions (f_n) définie sur $[0,1]$ par la récurrence suivante : $f_0(x) = x$, pour tout $x \in [0,1]$, et f_{n+1} construite à partir de f_n comme suit :

$$f_{n+1}(x) = \begin{cases} f_n(3x)/2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1/3, \\ 1/2 & \text{si } 1/3 \leq x \leq 2/3, \\ 1/2 + f_n(3x-2)/2 & \text{si } 2/3 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

On représentera l'allure des graphes de f_0, f_1 et f_2 pour visualiser cet escalier.

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout $x \in [0,1]$, on a : $\left|f_n(x) - f_{n-1}(x)\right| \leq \frac{1}{3}\, 2^{-n}$.
2. Établir à l'aide d'une somme télescopique que pour tout $n, p \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0,1]$, on a : $\left|f_{n+p}(x) - f_n(x)\right| \leq \frac{1}{3}\, 2^{-n}$.

3. En déduire que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$. On note f sa limite uniforme.

4. Montrer que f est continue et croissante sur $[0,1]$.

N.B. On montre que f est dérivable, que sa dérivée f' est nulle partout sauf sur un ensemble dénombrable de points de $[0,1]$ de longueur (mesure) égale à zéro, alors que f est continue et croissante sur $[0,1]$.

Exercice 4 (Dérivabilité)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable de dérivée seconde bornée sur $\mathbb{R}$. Pour $n \geq 1$, on note $g_n(x) = n\Big(f\big(x + \frac{1}{n}\big) - f(x)\Big)$, $x \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer la limite simple de la suite de fonctions $(g_n)_{n\geq 1}$.

2. La convergence est-elle uniforme ?

3. Calculer la limite (si elle existe) lorsque n tend vers l'infini de $\displaystyle\int_0^x g_n(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4. Que se passe-t-il (vis-à-vis de la convergence simple ou uniforme sur $\mathbb{R}$) si f'' n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$? On pourra prendre l'exemple $f(x) = x^3$.

Exercice 5 (Dérivation)**.** Soit $g_n(x) = \frac{n^2x^2}{1+n^2x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Étudier la convergence simple et uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Montrer que f_n définie par $f_n(x) = x - \frac{1}{n}\arctan(nx)$, $x \in \mathbb{R}$, est une primitive de g_n pour tout $n \geq 1$.

3. Étudier la convergence simple et uniforme sur $\mathbb{R}$ de $(f_n)_{n\geq 1}$ vers une limite que l'on déterminera. Cette limite est-elle dérivable ?

4. Se trouve-t-on dans la situation d'un théorème du cours ? Lequel ? Pourquoi ?