TD 3 – Séries de fonctions

Exercice 1 (Convergence simple et uniforme de séries de fonctions)**.** Étudier la convergence simple et uniforme sur I (ou sur $J \subset I$ à déterminer) des séries de fonctions $\sum f_n$ pour les f_n suivantes :

1. $I = \mathbb{R}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x^2+n^2}$, $n \geq 1$;
2. $I = \mathbb{R}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto nxe^{-n^2x^2}$, $n \geq 0$;
3. $I = [0, +\infty[$, $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(nx)\, e^{-nx}$, $n \geq 0$.

Exercice 2 (Convergence simple, uniforme, normale)**.** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive et décroissante. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n(x) = a_n x^n(1-x)$, $x \in [0,1]$.

(i) Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[0,1]$.

(ii) Montrer que cette série converge normalement si, et seulement si, la série numérique de terme général $\left(\frac{a_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ est convergente.

(iii) Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0,1]$ si, et seulement si, $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. On pourra étudier le reste de la série.

Exercice 3 (Série alternée)**.** Soit $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}$, $n \geq 1$.

(i) Montrer que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$. On appelle f la somme de cette série.

(ii) Que peut-on dire de la régularité (continuité, dérivabilité,...) de f sur $[0, +\infty[$?

(iii) La série $\sum f_n$ converge-t-elle normalement, uniformément sur $[0, \infty[$, ou sur un intervalle $I \subset [0, +\infty[$ à déterminer ?

Exercice 4 (Calcul de la somme de la série harmonique alternée)**.** Pour $n \geq 1$, on pose $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_n(x) = \frac{(-1)^n x^n}{n}$.

(i) Pour quel(s) $x \in \mathbb{R}$ la série $\sum f_n(x)$ converge-t-elle ?

(ii) Soit $0 < a < 1$. Montrer que $\sum f_n$ converge normalement (et donc uniformément) sur $[-a, a]$.

(iii) Montrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0,1]$.

(iv) Que vaut $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ pour tout $x \in]-1, 1]$? Donner en particulier la valeur de la série harmonique alternée.

Exercice 5 (Sommation d'Abel)**.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \geq 1$, on pose $u_n(x) = \frac{\sin nx}{n+x^2}$.

1. Déterminer les $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels la série $\sum u_n(x)$ est convergente.
2. Sur quel(s) intervalle(s) de $\mathbb{R}$ la convergence ci-dessus est-elle uniforme ?

Exercice 6 (Étude de la somme d'une série)**.** On pose

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^n}.$$

1. Étudier le domaine de définition, la continuité, la dérivabilité de S.
2. Donner un équivalent de S en 0.
3. On veut trouver un équivalent de S en 1.
   (a) Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, on a

   $$S(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p x^{n(p+1)} = \frac{1}{2} + \sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p \frac{x^{p+1}}{1-x^{p+1}}.$$

   (b) On pose $u_p(x) = x^{p+1}\frac{1-x}{1-x^{p+1}}$ pour $p \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1[$. Montrer que u_p est continue positive sur $[0,1[$ et est prolongeable par continuité en 1 par une valeur que l'on déterminera.
   (c) Montrer que la série de fonctions $\sum(-1)^p u_p$ est uniformément convergente sur $[0,1]$ (on pourra penser aux séries alternées). En déduire la valeur de

   $$\lim_{x\to 1} \sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p u_p(x).$$

   (d) Pour $x \in [0,1[$, exprimer $(1-x)S(x)$ en fonction de $\left\{u_p(x), p \in \mathbb{N}\right\}$. En déduire un équivalent de S au voisinage de 1.