Université d'Aix-Marseille **Année 2017-2018**
L2 Mathématiques Générales **Analyse 2**

TD 4 – Séries entières

Exercice 1 (Rayon de convergence)**.** Donner le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{n^n} z^n, \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^2}, \qquad \sum_{n\geq 1} (\ln n)^n z^n, \qquad \sum_{n\geq 1} (\sqrt{n})^n z^n, \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{a^n}{1+b^n} z^n \ (a, b > 0)$$

puis

$$\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n3^n}, \qquad \text{avec étude sur le cercle de convergence.}$$

Exercice 2 (Somme d'une série entière)**.** Déterminer le rayon de convergence et la somme des séries entières suivantes :

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)} x^n, \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{3n}{n+2} x^n, \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{2n+1}, \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{n}{(2n+1)!} x^n,$$

puis

$$\sum_{n\geq 1} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}\right) x^n, \qquad \text{par produit de Cauchy.}$$

Exercice 3 (Solution d'une équation différentielle)**.** Soit f la somme de la série entière $\sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

1. Montrer que $f(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Pourquoi en est-il de même pour $f'(x)$ et $f''(x)$?
3. Vérifier que $f''(x) + f(x) = 0$, $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.
4. Reconnaître alors la fonction élémentaire désignée par f.

Exercice 4. Soit f la somme de la série $\sum n z^{2n-1}$.

1. Que est le rayon de convergence R de cette série ?
2. Pour $x \in]-R, R[$, on note $\int_0^x f(t)\,dt$. Montrer que g est la somme d'une série entière dont on déterminera les coefficients et le rayon de convergence.
3. Donner une expression de g à l'aide de fonctions usuelles. En déduire la valeur de $f(x)$ pour $x \in]-R, R[$.
4. Déterminer la somme
$$\frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + ... = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{4^k}.$$
On indiquera brièvement pourquoi cette série converge avant tout calcul.

Exercice 5 (Développement en série entière et analyticité sur le disque de convergence)**.** 1. Développer en série entière la fonction $x \mapsto \frac{1}{(x+1)(x-2)}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à préciser.

2. Montrer que $x \mapsto e^x \sin x$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et donner son développement.

3. Montrer que $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$.

   En déduire que les fonctions arcsin et arccos sont également développables en séries entières sur $]-1,1[$.

4. Montrer que : $\dfrac{\pi}{3} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{4n}(n!)^2(2n+1)}$.

Exercice 6 (Fonction plateau de Cauchy)**.** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ si $x > 0$.

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. En déduire que f n'est pas développable en série entière au voisinage de 0.

Exercice 7 (Théorème d'Abel)**.**

1. Rappeler pourquoi la série $\sum \frac{\cos n}{n}$ (resp. $\sum \frac{\sin n}{n}$) est convergente. On note ℓ (resp. ℓ') sa somme.

2. Montrer que $\sum \frac{(te^i)^n}{n}$ est convergente pour tout $t \in [-1,1]$. On note $f(t)$ sa somme.

3. Montrer que f est continue sur $[-1,1]$, dérivable sur $]-1,1[$.

4. Donner l'expression de f' à l'aide de fonctions usuelles sur $]-1,1[$.

5. En déduire l'expression de $\Re e f$ à l'aide de fonctions usuelles, puis donner la valeur de ℓ.