Théorème de point fixe de Browder

Le but de ce problème est de démontrer le théorème suivant :

Théorème (Browder)**.** *Soit E un espace de Banach uniformément convexe, $C \subset E$ une partie convexe fermée non vide de E et T une application de C dans C vérifiant $\|T(x)-T(y)\| \leq \|x-y\|$ pour tout $x, y \in C$. Alors T admet un point fixe.*

On rappelle que :

Définition (Espace uniformément convexe)**.** Un espace de Banach $(E, \|\cdot\|)$ est uniformément convexe si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in E$ avec $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ et $\|x - y\| \geq \varepsilon$, on a $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1 - \delta$.

On rappelle (ou on admet) que

Proposition . *Un espace de Banach uniformément convexe est réflexif.*

1 Préliminaires

1. Montrer que $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne est uniformément convexe (dans ce cas-là, donner explicitement la valeur de δ en fonction de ε), mais pas si on le munit de la norme du max.
2. Montrer que pour tout $R > 0$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\big(a, b \in E, \|a\| \leq R, \|b\| \leq R, \|a - b\| > \varepsilon\big) \implies \Big(\Big\|\frac{a+b}{2}\Big\|^2 \leq \frac{1}{2}\|a\|^2 + \frac{1}{2}\|b\|^2 - \delta\Big).$$

   On pourra raisonner par l'absurde.

2 Centre d'une partie de C

Soit $A \subset C$ un ensemble borné non vide. On définit φ de E dans $\mathbb{R}$ par

$$\varphi(x) = \sup_{y \in A} \|x - y\|, \quad x \in E.$$

1. Montrer que φ est une fonction convexe et 1-lipschitzienne.
2. Montrer qu'il existe un unique élément $c \in C$ tel que $\varphi(c) = \inf_{x \in C} \varphi(x)$.

   Cet élément c est appelé *centre* de A. Dans la suite, on note $\sigma(A)$ le centre de A.
3. Montrer que si A n'est pas réduit à un élément, alors

$$\varphi(\sigma(A)) < \operatorname{diam}(A) := \sup_{x,y \in A} \|x - y\|.$$

3 Centre asymptotique d'une suite bornée de C

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de C. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $A_n = \{a_k, k \geq n\}$, et on définit φ_n de E dans $\mathbb{R}$ par

$$\varphi_n(x) = \sup_{y\in A_n} \|x - y\|, \quad x \in E.$$

1. Montrer que pour tout $x \in E$, la suite $\big(\varphi_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite dans $\mathbb{R}$.

   On définit $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)$, $x \in E$.

2. Montrer que φ est continue sur E.

3. Montrer qu'il existe un unique $\overline{\sigma} \in C$ tel que $\varphi(\overline{\sigma}) = \inf_{x\in C} \varphi(x)$.

   On dit que $\overline{\sigma}$ est le *centre asymptotique* de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\sigma_n = \sigma(A_n)$ ($\sigma(A_n)$ est le centre de la partie A_n comme défini à la partie 2). Montrer que $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers $\overline{\sigma}$ dans E lorsque n tend vers l'infini (c'est-à-dire pour la topologie $\sigma(E, E')$) et que
$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(\sigma_n) = \lim_{n\to\infty} \varphi(\sigma_n) = \varphi(\overline{\sigma}).$$

5. Montrer que la suite $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\overline{\sigma}$ dans E (fortement).

   On pourra raisonner par l'absurde et utiliser la partie 1.

6. On suppose dans cette question que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a dans E. Montrer alors que a est le centre asymptotique de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

7. On suppose dans cette question que E est un espace de Hilbert et que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers a dans E. Montrer que a est le centre asymptotique de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   On pourra penser à développer les carrés des normes dans la partie 1.

4 Preuve du théorème de Browder

Soit $T : C \to C$ une application vérifiant $\|T(x) - T(y)\| \leq \|x - y\|$ pour tout $x, y \in C$.

1. Soit $a \in C$. On définit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de C en posant $a_0 = a$ et $a_{n+1} = T(a_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Soit $\overline{\sigma}$ le centre asymptotique de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   Montrer que $\overline{\sigma}$ est un point fixe de T, c'est-à-dire que $T(\overline{\sigma}) = \overline{\sigma}$.

2. En déduire une preuve du théorème de Browder.