DM3 - à rendre le 6 décembre 2018

Autour de la transformée de Fourier

Soit $d \geq 1$.

1. Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on note
$$\mathscr{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

   (a) Montrer que si $\xi \neq 0$, alors $\mathscr{F}(f)(\xi) = -\mathscr{F}(\tau_{-\pi\xi/|\xi|^2} f)(\xi)$ où τ_a ($a \in \mathbb{R}^d$), est défini par
$$\tau_a \varphi(\xi) = \varphi(x+a), \quad x \in \mathbb{R}^d,$$
   pour toute fonction (ou classe de fonctions) φ sur $\mathbb{R}^d$.

   (b) En déduire que $2|\mathscr{F}(f)(\xi)| \leq \|f - \tau_{-\pi\xi/|\xi|^2} f\|_1$. Montrer alors que $\mathscr{F}(f)(\xi) \xrightarrow[|\xi|\to\infty]{} 0$ (c'est le lemme de Riemann-Lebesgue).

   (c) Montrer que pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\mathscr{F}(f) \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R}^d)$ et que $\|\mathscr{F}(f)\|_\infty \leq \|f\|_1$.

   (d) Montrer que $\mathscr{F} : L^1(\mathbb{R}^d) \to \mathscr{C}_0(\mathbb{R}^d)$ est une application linéaire continue vérifiant
$$\forall\, f, g \in L^1(\mathbb{R}^d),\ \mathscr{F}(f * g) = \mathscr{F}(f)\mathscr{F}(g).$$
   On dit que $\mathscr{F}$ est un morphisme de l'algèbre de Banach L^1 munie de la convolution dans l'algèbre de Banach $\mathscr{C}_0$ munie de la multiplication.

2. On veut maintenant caractériser l'ensemble des formes linéaires continues Φ non nulles sur $L^1(\mathbb{R}^d)$ vérifiant
$$\forall\, f, g \in L^1(\mathbb{R}^d),\ \Phi(f * g) = \Phi(f)\Phi(g).$$
   On note $\mathcal{M}$ cet ensemble.

   (a) Montrer que pour $\xi \in \mathbb{R}^d$, la forme linéaire Φ_ξ définie par $\Phi_\xi(f) = \mathscr{F}(f)(\xi)$, $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, appartient à $\mathcal{M}$.

   (b) Soit $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ une fonction continue bornée non identiquement nulle vérifiant
$$\varphi(t+s) = \varphi(t)\varphi(s) \text{ pour tout } t, s \in \mathbb{R}^d.$$

      i. Montrer que $\varphi(0) = 1$.

      ii. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $t = (t_1, ..., t_d) \in \mathbb{R}^d$, on a
$$\int_{t_1}^{t_1+\varepsilon} ... \int_{t_d}^{t_d+\varepsilon} \varphi(s)\,\mathrm{d}s_d ... \mathrm{d}s_1 = \left(\int_{[0,\varepsilon]^d} \varphi(s)\,\mathrm{d}s\right)\varphi(t).$$

      iii. En déduire que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ et vérifie
$$\forall\, j \in \{1, ..., d\},\ \forall\, t \in \mathbb{R}^d,\ \frac{\partial\varphi}{\partial t_j}(t) = \frac{\partial\varphi}{\partial t_j}(0)\varphi(t).$$

      iv. En déduire qu'il existe $\xi \in \mathbb{R}^d$ tel que $\varphi(t) = e^{i\xi\cdot t}$, $t \in \mathbb{R}^d$.
      Indication : En notant $a_j = \frac{\partial\varphi}{\partial t_j}(0)$, montrer que $t \mapsto e^{-a\cdot t}\varphi(t)$ est constante sur $\mathbb{R}^d$.

(c) Soit $\Phi \in \mathcal{M}$.

i. Montrer qu'il existe $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ tel que

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}^d),\ \Phi(f) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(t) f(t)\, \mathrm{d}t.$$

ii. Montrer que pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$,

$$\Phi(\tau_{-a} f) = \Phi(f)\varphi(a), \quad \text{pour presque tout } a \in \mathbb{R}^d.$$

Indication : on pourra montrer que pour tout $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Phi(f)\varphi(a) g(a)\, \mathrm{d}a = \int \Phi(\tau_a f) g(a)\, \mathrm{d}a$$

en utilisant le fait que Φ “transforme” la convolution en produit.

iii. En déduire que φ admet un représentant continu borné sur $\mathbb{R}^d$, noté encore φ, vérifiant

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}^d),\ \forall a \in \mathbb{R}^d,\ \Phi(\tau_{-a} f) = \Phi(f)\varphi(a).$$

iv. Montrer alors que $\varphi(a+b) = \varphi(a)\varphi(b)$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}^d$.

v. En déduire qu'il existe $\xi \in \mathbb{R}^d$ tel que $\varphi(t) = e^{-i\xi \cdot t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}^d$.

(d) Montrer que $\xi \to \Phi_\xi$ est une bijection de $\mathbb{R}^d$ sur $\mathcal{M}$.