Devoir maison

à rendre le 7 novembre 2018

On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles carrées $n \times n$ que l'on munit de la norme infinie : $\|A\| = \max\{|a_{i,j}|, 1 \leq i, j \leq n\}$, pour tout $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Soit $GL_n(\mathbb{R})$ les matrices réelles $n \times n$ inversibles.
   (a) Montrer que l'application déterminant $\det : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est continue.
   (b) En déduire que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   (c) Montrer que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \setminus GL_n(\mathbb{R})$ est fermé mais n'est pas compact dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. On note $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles orthogonales $n \times n$, c'est-à-dire les matrices $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M\,{}^tM = {}^tMM = I_n$, où I_n est la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que l'application $M \mapsto {}^tMM$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est continue.
   (b) Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est fermé dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   (c) Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est borné.
   (d) Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ n'est pas convexe.
3. Soit $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble matrices symétriques réelles $n \times n$, c'est-à-dire les matrices $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $a_{i,j} = a_{j,i}$ pour tout $i, j = 1, ..., n$. Montrer que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. En déduire que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
4. Soit $0 \leq p \leq n$. On rappelle qu'une matrice A est de rang $p < n$ si tous ses mineurs d'ordre $p+1$ sont nuls, c'est-à-dire que pour tout $I, J \subset \{1, ..., n\}$ avec $|I| = |J| = p+1$, la matrice $A_{I,J}$ (extraite de A d'ordre $p+1$ dont les numéros de lignes sont dans I et les numéros de colonnes sont dans J) est de déterminant nul.

   Montrer que l'ensemble des matrices de rang inférieur ou égal à p est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
5. On note $T = \big\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \mapsto ax^2 + 2bxy + cy^2 \text{ est une forme quadratique définie positive}\big\}$.

   Montrer que T est un ouvert de $\mathbb{R}^3$.
6. On dit que $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice stochastique si pour tout $i, j = 1, ..., n$, $a_{i,j} \geq 0$ et $\sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$ pour tout $i = 1, ..., n$.

   Montrer que l'ensemble des matrices stochastiques est un compact convexe de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.