Devoir surveillé

Vendredi 26 octobre 2018

Topologie

Exercice 1. On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne : $\|(x_1, x_2)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. On note A l'ensemble $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1^2 x_2^2 > 1 \text{ et } x_2 \geq 0\}$.

1. Dessiner A.
2. A est-il ouvert ? fermé ?
3. Déterminer l'intérieur et l'adhérence de A.

Exercice 2. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Montrer que f est "presque" lipschitzienne ; c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C_\varepsilon > 0$ telle que pour tout $x, y \in [0, 1]$, on a $|f(x) - f(y)| \leq C_\varepsilon |x - y| + \varepsilon$.

   Indication : on pourra penser à utiliser le fait que f est uniformément continue sur $[0, 1]$ (pourquoi ?).
2. Donner un exemple de fonction sur $[0, 1]$ presque lipschitzienne qui n'est pas lipschitzienne.

Exercice 3. Soit X et Y deux espaces vectoriels normés. Soit $f : X \to Y$ une application : f est dite fermée si l'image de tout fermé de X est un fermé de Y.

1. Montrer que f est fermée si, et seulement si, $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$ pour tout $A \subset X$.
2. Montrer que f est continue si, et seulement si, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ pour tout $A \subset X$.

Probabilités

Exercice 4. Deux joueurs A et B jouent à pile ou face avec une pièce équilibrée. Chacun lance la pièce à son tour, et c'est le joueur A qui commence. Chaque lancer est supposé indépendant des autres. Le premier joueur à obtenir un pile a gagné la partie. Soit X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si le i-ème lancer donne pile, et 0 s'il donne face. On pose $T = \inf\{n \geq 1 : X_n = 1\}$.

1. Dans chacun des cas suivants, indiquer qui a gagné la partie et préciser la valeur prise par la variable aléatoire T:

$$(X_1, X_2, \ldots) = (1, 0, 1, 1, \ldots)\ ,\ (X_1, X_2, \ldots) = (0, 1, 0, 1, \ldots)\ ,\ (X_1, X_2, \ldots) = (0, 0, 0, 1, 0, \ldots).$$

2. Exprimer l'événement "A gagne la partie" en fonction de T.
3. Montrer que pour tout $k \geq 2$ on a l'égalité entre les événements

$$(T = k) = \left(\bigcap_{i=0}^{k-1} (X_i = 0)\right) \cap (X_k = 1)$$

   et en déduire la valeur de $\mathbb{P}(T = k)$. Que vaut $\mathbb{P}(T = 1)$?

4. Calculer la probabilité que le joueur A gagne la partie.

5. Quelle est le nombre moyen de lancers pour une partie ?

Exercice 5. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = \frac{3}{x^4}$ si $x > 1$ et $f(x) = 0$ si $x \leq 1$.

1. Montrer que pour tout $p > 1$ on a $\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{p-1}$. En déduire que f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

2. Soit X une v.a. de loi de densité f.

   (a) Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathrm{Var}(X)$.

   (b) Calculer la fonction de répartition $F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

3. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi de densité f.

   (a) Montrer que $\mathbb{P}(\inf(X,Y) > t) = (1 - F_X(t))^2$.

   (b) En déduire la densité de la loi de $\inf(X,Y)$.