Faculté des Sciences
Aix-Marseille Université

Année universitaire 2018/2019

Site : ☐ Luminy ☐ St-Charles ☒ St-Jérôme ☐ Cht-Gombert ☐ Aix-Montperrin ☐ Aubagne-SATIS
Sujet de : ☒ 1^{er} semestre ☐ $2^{\text{ème}}$ semestre ☐ Session 2 Durée de l'épreuve : 2h
Examen de : L3 Nom du diplôme : Licence MPCI
Code du module : SMP5U04TJ Libellé du module : Topologie et Probabilités
Calculatrices autorisées : NON Documents autorisés : NON

Veuillez rédiger l'exercice de probabilités sur une feuille à part.

Il sera tenu compte de la rédaction dans la note finale.

Questions de cours (topologie). Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

1. Donner la définition d'un compact de E par des recouvrements par des ouverts.
2. Donner la définition séquentielle des compacts de E.
3. Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite qui converge dans E vers une limite que l'on note x. Montrer que l'ensemble $\{x_n, n \geq 1\} \cup \{x\}$ est compact.

Exercices de topologie.

1. Soit $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x+y = 1, 0 < y < 1\}$ et $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x+y < 1, 0 \leq y \leq 1\}$.
   (a) Dessiner les ensembles A et B sur deux graphiques différents (on précisera ce qui est et ce qui n'est pas dans l'ensemble).
   (b) Les ensembles A et B sont-ils ouverts dans $\mathbb{R}^2$? fermés ? (on justifiera les réponses).
   (c) Déterminer l'adhérence et l'intérieur de A et B (en justifiant vos réponses).
2. Soit E et F deux espaces vectoriels normés. Soit $L : E \to F$ une application linéaire.
   (a) Montrer que si E est de dimension finie, alors L est une application lipschitzienne.
   En déduire que pour toute suite $(x_n)_{n\geq 1}$ de E qui tend vers 0_E, la suite $(L(x_n))_{n\geq 1}$ converge vers 0_F dans F.
   (b) On suppose maintenant que E est de dimension infinie et que pour toute suite $(x_n)_{n\geq 1}$ de E qui tend vers 0_E, la suite $(L(x_n))_{n\geq 1}$ converge dans F vers 0_F.
   Montrer que alors que L est continue. Est-elle lipschitzienne ?
3. Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ une fonction continue.
   (a) Montrer que si f est uniformément continue, alors elle est bornée.
   (b) Soit $\varphi :]0,1[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\varphi(x) = \sin\frac{1}{x}$, $0 < x < 1$.
      i. Montrer que φ est continue et bornée.
      ii. En considérant la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ définie par $x_n = \frac{2}{n\pi}$, $n \geq 1$, montrer que φ n'est pas uniformément continue.
      iii. Que peut-on dire de la réciproque de 3a ?

Exercice de probabilités. Soit (X, Y) un vecteur aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]^2$. Cela signifie que, pour toute partie (mesurable) $A \subset \mathbb{R}^2$, on a

$$\mathbb{P}((X,Y) \in A) = \left|A \cap [0,1]^2\right|,$$

où la notation $|B|$ désigne la surface de la partie B.

1. Soit $t \in [0,1]$. On pose $A_t =]-\infty, t] \times \mathbb{R}$. Montrer que l'on a l'égalité suivante entre événements :

$$(X \leq t) = ((X,Y) \in A_t)\,.$$

   Dessiner les ensembles A_t et $[0,1]^2$ et en déduire que $\mathbb{P}(X \leq t) = t$ pour tout $t \in [0,1]$. En déduire que X suit la loi uniforme sur $[0,1]$.

2. Montrer que Y suit également la loi uniforme sur $[0,1]$.

3. Soient $0 \leq a_1 \leq b_1 \leq 1$ et $0 \leq a_2 \leq b_2 \leq 1$. On pose $A = [a_1, b_1] \cap [a_2, b_2]$. Montrer que

$$\mathbb{P}((X,Y) \in A) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2).$$

   En déduire que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

4. Soit $t \geq 0$. On pose $B_t = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq tx\}$. Dessiner l'ensemble $B_t \cap [0,1]^2$ lorsque $0 \leq t \leq 1$, puis lorsque $t > 1$.

5. Montrer que $\mathbb{P}((X,Y) \in B_t) = t/2$ si $0 \leq t \leq 1$ et $\mathbb{P}((X,Y) \in B_t) = 1 - 1/(2t)$ si $t > 1$.

6. En déduire le résultat suivant : si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$, alors la variable aléatoire $Z = \frac{X}{Y}$ suit la loi de densité f donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \frac{1}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ -\frac{1}{2x^2} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

7. Calculer la valeur de $\mathbb{E}\left[\sqrt{\frac{X}{Y}}\right]$ de deux façons différentes.