**Analyse fonctionnelle et analyse de Fourier**

**Contrôle 1 - Semaine du 1er octobre 2018**

**Exercice 1.** On note $d$ la distance euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ et, pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$, on note $B(x,r)$ la boule euclidienne ouverte de $\mathbb{R}^n$ de centre $x$ et de rayon $r > 0$.

Soient $K$ un compact et $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ tels que $K \subset U$.

1. Que signifie le fait que $U$ soit un ouvert de $\mathbb{R}^n$ ? Qu'en déduire pour tout $x \in K$ ?
2. Montrer qu'il existe un ouvert $V$ borné tel que $K \subset V \subset \overline{V} \subset U$.

**Exercice 2.** Soit $E = C([0,1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in E$, on note

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt \quad \text{et} \quad \|f\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} |f(t)|.$$

On note $u : E \to \mathbb{R}$ l'application linéaire définie par $u(f) = f(1/2)$ pour tout $f \in E$.

1. Vérifier que $\|\ \|_1$ et $\|\ \|_\infty$ sont bien des normes sur $E$.
2. En munissant $E$ de la norme $\|\ \|_1$, l'application $u$ est-elle continue, et si oui quelle est sa norme $|||u|||$ ?
3. En munissant $E$ de la norme $\|\ \|_\infty$, l'application $u$ est-elle continue, et si oui quelle est sa norme $|||u|||$ ?

**Exercice 3.** Soit $E = C^1([0,2018],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions de $[0,2018]$ dans $\mathbb{R}$ de classe $C^1$ sur $[0,2018]$. On note $\|f\|_\infty = \max_{t\in[0,2018]} |f(t)|$ pour tout $f \in E$.

1. L'application $\|\ \|_\infty$ est-elle une norme sur $E$ ?
2. L'espace $E$ muni de la norme $\|\ \|_\infty$ est-il un espace de Banach ?

   *Indication : on pourra par exemple considérer la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n(x) = \sqrt{x+2^{-n}}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,2018]$.*