Université d'Aix-Marseille **Année 2018-2019**
L3 MPCI **Topologie**

Contrôle 1

Mardi 2 octobre 2018

Question de cours 1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Donner la définition d'un ouvert de E.

Question de cours 2. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme suivante : $y \mapsto \|y\|_1 = \sum_{k=1}^n |y_k|$. Que veut dire "$f$ est continue au point x" ?

Exercice 1. Sur $\mathbb{R}^2$, on définit les normes : $\|x\|_1 = |x_1|+|x_2|$, $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ et $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \|x_2|\}$.

1. Dessiner les boules unités dans $\mathbb{R}^2$ pour les trois normes définies ci-dessus.
2. Soit $x \in \mathbb{R}^2$ fixé. Pour $k = 1, 2, \infty$, on définit
$$f_k(y) = \|x - y\|_k, \quad y \in \mathbb{R}^2.$$
Montrer que f_k est continue dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme $\|\cdot\|_j$ ($j = 1, 2, \infty$).
3. Dessiner dans $\mathbb{R}^2$ l'ensemble
$$E = \left\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1^2 \leq x_2 \leq 1 + x_1\right\}$$
4. E est-il ouvert dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$? fermé ? Déterminer l'intérieur de E.

Exercice 2. Soit $n \geq 1$ et $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Sur $\mathbb{R}^n$, on considère la norme
$$\|x\|_\infty = \max\{x_k, k = 1, ..., n\}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

1. Pour $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in E$, on définit
$$|||A||| := \sup\left\{\|Ax\|_\infty, x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_\infty = 1\right\}.$$
Montrer que $|||\cdot|||$ est une norme sur E. (On dit que $|||\cdot|||$ est la norme subordonnée à $\|\cdot\|_\infty$.)
2. Montrer que $|a_{i,j}| \leq |||A|||$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$.
3. Que vaut $|||A|||$?