Interrogation écrite 2

Lundi 19 novembre 2018

Exercice 1. Soit $f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ telle que

$$\int_0^1 t^p\, f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \quad \text{pour tout } p \in \mathbb{N}.$$

Montrer que $f(t) = 0$ pour tout $t \in [0,1]$.

Exercice 2. On définit l'application V sur $L^2(]0,1[) = L^2(]0,1[,\mathbb{R})$ par

$$Vf(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in [0,1], \quad f \in L^2(]0,1[).$$

1. Montrer que pour tout $f \in L^2(]0,1[)$, la fonction Vf est bien définie sur $[0,1]$, qu'elle ne dépend pas du représentant choisi dans la classe de f, et que $Vf \in \mathscr{C}([0,1])$.
2. Montrer que $V \in \mathscr{L}\big(L^2(]0,1[;\mathscr{C}([0,1])\big)$, en munissant $\mathscr{C}([0,1])$ de la norme $\| \ \|_\infty$ habituelle.
   Que vaut la norme $|||V|||$ de V ?
3. L'opérateur V est-il compact ?

Exercice 3. Soit $1 \le p < \infty$ et soit $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n) = \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$. Pour $h \in \mathbb{R}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$, on note $\tau_h f(x) = f(x+h)$. On note $\| \ \|$ la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$.

1. Pourquoi a-t-on $\tau_h f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n$?
2. Montrer que $\|\tau_h f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \to 0$ quand $\|h\| \to 0$.
3. Le résultat de la question 2 reste-t-il vrai si $p = \infty$? (justifier la réponse)