Analyse fonctionnelle et analyse de Fourier

Contrôle 3 - Semaine du 10 décembre 2018

L'énoncé peut paraître long, mais les réponses à certaines questions sont vraiment très courtes. Les exercices peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Exercice 1. Soit $E = C([0,1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in E$, on note

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt.$$

1. Pourquoi l'espace E muni de $\| \ \|_1$ est-il un espace vectoriel normé ?
2. Cours : quelle est la définition d'un espace de Banach ?
3. L'espace E muni de $\| \ \|_1$ est-il un espace de Banach ? (justifier la réponse)
4. Cours : énoncer le théorème de Riesz sur la boule unité fermée d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé.
5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n \in E$ la fonction définie par : $u_n(x) = n(1-nx)$ si $x \in [0,1/n]$ et $u_n(x) = 0$ si $x \in]1/n, 1]$. Tracer le graphe de u_n. Que vaut $\|u_n\|_1$? Quelle est la limite de $u_n(x)$ quand $n \to +\infty$, pour tout $x \in]0,1]$?
6. L'espace E est-il de dimension finie ou infinie ? (justifier la réponse)

Exercice 2. Soit H un $\mathbb{R}$-espace de Hilbert, muni d'un produit scalaire noté $< \, , \, >$. On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de H et $u \in H$ tels que

$$<x, u_n> \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} <x, u> \quad \text{pour tout } x \in H.$$

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on note $T_n : H \to \mathbb{R}$ l'application définie par $T_n(x) = <x, u_n>$, et $T : H \to \mathbb{R}$ l'application définie par $T(x) = <x, u>$, pour $x \in H$.

1. Questions de cours. Quelle est la définition de $\|x\|$, pour $x \in H$? L'espace H muni de la norme $\| \ \|$ est-il un espace de Banach ?
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application T_n est-elle dans $H' = \mathcal{L}(H,\mathbb{R})$? et si oui que vaut $|||T_n|||$? Mêmes questions pour l'application T.
3. En utilisant un théorème du chapitre 1, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et que $\|u\| \le \liminf\limits_{n\to+\infty} \|u_n\|$.

Exercice 3.

1. Soit $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ telle que

$$\int_0^1 t^p\, f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \quad \text{pour tout } p \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

   Montrer que $f(t) = 0$ pour tout $t \in [0,1]$.

2. Cours : énoncer l'inégalité de Hölder (concernant les espaces $\mathcal{L}^p(\Omega)$, où Ω est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$).

3. Cours : si Ω est un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^n$ et si $1 \leq p < q \leq \infty$, a-t-on $\mathcal{L}^p(\Omega) \subset \mathcal{L}^q(\Omega)$ ou bien $\mathcal{L}^q(\Omega) \subset \mathcal{L}^p(\Omega)$? (sans justification)

4. Soit maintenant $f \in \mathcal{L}^2(]0,1[) = \mathcal{L}^2(]0,1[,\mathbb{R})$. On suppose que f vérifie (1).

   (a) Pourquoi chaque intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^p\, f(t)\,\mathrm{d}t$ a-t-elle bien un sens, pour $p \in \mathbb{N}$?

   (b) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \varphi(t)\, f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ pour tout $\varphi \in C([0,1],\mathbb{R})$.

   (c) Cours : citer un théorème donnant l'existence d'un sous-ensemble dense dans $\mathcal{L}^2(]0,1[)$.

   (d) Montrer que $f(t) = 0$ pour presque tout $t \in]0,1[$.

Exercice 4. On considère le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $L^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ muni de la norme $\|\ \|_1$ habituelle.

1. Questions de cours. Soit $f \in L^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

   (a) Quelle est la définition de $\hat{f}(\xi)$ pour $\xi \in \mathbb{R}$? Pourquoi cette définition ne dépend-elle pas du représentant choisi dans la classe de f ? Quelle inégalité a-t-on entre $|\hat{f}(\xi)|$ et $\|f\|_1$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$? (réponses courtes)

   (b) À quel $\mathbb{C}$-espace vectoriel X la fonction $\hat{f}$ appartient-elle ? (*plusieurs bonnes réponses sont possibles, vous pouvez n'en donner qu'une seule, mais elle doit être cohérente avec les questions suivantes*)

2. On munit X de la norme infinie $\|\ \|_\infty$ habituelle et on note $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R},\mathbb{C}) \to X$ l'application linéaire définie par $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$ pour tout $f \in L^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

   D'après la question précédente, l'application $\mathcal{F}$ est-elle continue et si oui quelle inégalité la quantité $|||\mathcal{F}|||$ vérifie-t-elle ?

3. Après avoir énoncé le théorème d'inversion de la transformée de Fourier vu en cours (adapté ici au cas de la dimension $n = 1$), justifier en deux lignes l'injectivité de l'application $\mathcal{F}$.

4. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $g(x) = e^{-x^2}$. On rappelle que $\|g\|_1 = \sqrt{\pi}$ et que $\hat{g}(\xi) = \sqrt{\pi}\, e^{-\xi^2/4}$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$. Que vaut $|||\mathcal{F}|||$?