TD 1 – Espaces vectoriels normés

Exercice 1 (Inégalités de Hölder et Minkowski)**.** On considère $p, q > 1$ vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. Soit a et b deux réels positifs. Montrer que
$$ab \leq \frac{1}{p}\, a^p + \frac{1}{q}\, b^q.$$
Indication : Poser $\alpha = \ln(a^p)$ et $\beta = \ln(b^q)$, puis utiliser la convexité de la fonction exponentielle.

2. (a) Pour $\lambda > 0$ et $x, y \in \mathbb{R}^n$, montrer (en appliquant l'inégalité précédente) que
$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq \frac{\lambda^p}{p} \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p + \frac{1}{q\lambda^q} \sum_{k=1}^{n} |y_k|^q.$$
   (b) En optimisant l'inégalité précédente par rapport à $\lambda > 0$, montrer l'inégalité de Hölder :
$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq \Big(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\Big)^{\frac{1}{q}}.$$
   (c) En déduire l'inégalité de Minkowski :
$$\Big(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}}.$$
   Indication : estimer d'abord $\sum_{k=1}^{n} |x_k||x_k + y_k|^{p-1}$ en utilisant l'inégalité de Hölder avec $p > 1$ et $q = \frac{p}{p-1}$.

3. Adapter la preuve précédente pour montrer que $\ell^p(\mathbb{N})$ est un espace vectoriel normé.

4. Adapter la preuve précédente pour montrer que
$$N_p : \mathscr{C}([0,1]) \longmapsto [0, \infty[, \quad N_p(f) = \Big(\int_0^1 |f|^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$
est une norme sur $\mathscr{C}([0,1])$.

Exercice 2 (Distance ne provenant pas d'une norme)**.** On considère E l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur l'intervalle ouvert $]0,1[$.

1. Montrer que les normes N_p comme définies ci-dessus ne sont pas adaptées à E.

2. Pour $k \geq 2$, on note $I_k = \left[\frac{1}{k+1}, \frac{k}{k+1}\right]$ et $N_{1,k}$ la norme 1 sur $\mathscr{C}(I_k)$: $N_{1,k}(f) = \int_{I_k} |f|$ pour tout $f \in \mathscr{C}(I_k)$.
   (a) Montrer que la restriction à I_k d'une fonction de E appartient à $\mathscr{C}(I_k)$.
   (b) Sur E, on définit
$$d : E \times E \to [0, \infty[, \quad d(f,g) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{N_{1,k}(f-g)}{1 + N_{1,k}(f-g)}, \quad f, g \in E.$$
   Montrer que la somme infinie intervenant dans la définition de $d(f,g)$ est convergente pour tout $f, g \in E$.

(c) Montrer que pour $a, b \in \mathbb{R}$, $\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$.

(d) En déduire que d est une distance sur E, puis que d ne provient pas d'une norme.

Exercice 3 (Sous-groupes de $\mathbb{R}$)**.** Soit G un sous-groupe du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$.

1. On suppose que $\inf\{x \in G, x > 0\} = a > 0$.

   (a) Montrer (par l'absurde) que $a \in G$.

   (b) Montrer que $G \subset a\mathbb{Z}$.

   (c) En déduire que $G = a\mathbb{Z}$.

2. On suppose maintenant que $\inf\{x \in G, x > 0\} = 0$.

   (a) Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$.

   (b) Montrer qu'il existe $h \in G$ tel que $0 < h < y - x$.

   (c) Montrer alors que pour $n \in \mathbb{Z}$, la partie entière de $\frac{x}{h}$, on a

   $$nh \leq x < (n+1)h < y.$$

   (d) En déduire que G est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 4 (Espace de matrices)**.** On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) l'ensemble des matrices carrées $n \times n$ sur $\mathbb{K}$ et $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Nous adoptons la notation I_n pour la matrice identité.

1. Montrer que

   $$N_\infty : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow [0, \infty[, \quad A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \longmapsto \max_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}|$$

   est une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

2. Donner deux autres exemples de normes sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'elles sont équivalentes à N_∞.

3. Rappelons qu'une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ appartient $GL_n(\mathbb{K})$ si, et seulement si, son déterminant est non nul.

   (a) Trouver une suite de matrices de $GL_n(\mathbb{K})$ qui approche la matrice nulle pour la norme N_∞.

   (b) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que pour $k \in \mathbb{N}$ assez grand, $A + \frac{1}{k} I_n$ appartient à $GL_n(\mathbb{K})$. On pourra considérer le polynôme P défini par $P(t) := \det(A + tI_n)$.

   (c) En déduire que $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.