TD 2 – Espaces complets

Exercice 1 (Série de Von Neumann)**.** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach. On note $\mathscr{L}(E)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans E, muni de la norme $|||\cdot|||$ subordonnée à $\|\cdot\|$. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ telle que $|||u||| < 1$.

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u^n$ est convergente dans $\mathscr{L}(E)$ (u^n représente la composée n fois de l'application linéaire u par elle-même).
2. Montrer que $\mathrm{Id}_E - u$ est inversible dans $\mathscr{L}(E)$.
3. Montrer que $|||(\mathrm{Id}_E - u)^{-1}||| \leq \frac{1}{1-|||u|||}$.

Exercice 2 (Distance à un fermé)**.** Soit (X, d) un espace métrique dans lequel toutes les boules fermées sont compactes. Soit F un sous-ensemble fermé de X. On note

$$\delta_F(x) = d(x, F) = \inf_{y \in F} d(x, y), \quad x \in X.$$

1. Montrer que pour $x \in X$: $\delta_F(x) = 0$ si, et seulement si, $x \in F$.
2. Montrer que δ_F est continue sur (X, d).
3. Soit K un compact de X, disjoint de F. Montrer que $\inf\{\delta_F(x), x \in K\} > 0$.
4. Montrer qu'il existe U et V deux ouverts disjoints de X tels que $F \subset U$ et $K \subset V$.

Exercice 3 (Une application du théorème de Baire)**.** Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de (X, d) espace métrique complet dans (Y, δ) espace métrique. On suppose que pour tout $x \in X$, il existe $f(x) \in Y$ tel que $\lim_{n\to\infty} \delta(f_n(x), f(x)) = 0$ (la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f). Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe une partie dense de X sur laquelle f est continue.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \geq 1$, on pose

$$F_{k,n} := \bigcap_{p,q\geq n} \big\{x \in X; \delta(f_p(x), f_q(x)) \leq \frac{1}{k}\big\}.$$

   (a) Montrer que pour tout $p, q \in \mathbb{N}$ et tout $k \geq 1$, l'ensemble $\big\{x \in X; \delta(f_p(x), f_q(x)) \leq \frac{1}{k}\big\}$ est fermé dans X.
   (b) En déduire que $F_{k,n}$ est fermé pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \geq 1$.
   (c) Soit $k \geq 1$ fixé. Montrer que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_{k,n}$.

2. Pour $k \geq 1$, on note

$$\Omega_k = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overset{\circ}{F}_{k,n}.$$

   (a) Montrer que pour tout $k \geq 1$, Ω_k est un ouvert dense de X.
   (b) Soit $k \geq 1$ et $x \in \Omega_k$. Montrer qu'il existe $r > 0$ (r dépend de k et de x) tel que pour tout $y \in X$ avec $d(x, y) \leq r$, on a $\delta(f(x), f(y)) \leq \frac{3}{k}$.

(c) On note $\Omega = \bigcap_{k\geq 1} \Omega_k$.

   i. Montrer que Ω est dense dans X.

   ii. Montrer que f est continue en tout $x \in \Omega$.

3. Conclusion ?

4. Application

   (a) Montrer que la dérivée d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ est continue sur un ensemble dense de $\mathbb{R}$.

   (b) Soit $\{r_1, r_2, ..., r_n, ...\}$ une énumération des rationnels de $[0,1]$. Pour $x \in [0,1]$, on définit

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \varphi(x - r_n), \quad \text{où } \varphi(t) = t^2 \sin(1/t).$$

   Montrer que f est dérivable sur $[0,1]$, puis que f' est continue sur $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$, discontinue sur $[0,1] \cap \mathbb{Q}$.

Exercice 4 (Formes linéaires continues)**.** Soit E un espace vectoriel normé séparable et $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite dense de E. On note E' l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur E, et on le munit de la norme subordonnée à celle de E. On note B la boule unité de E', c'est-à-dire

$$B = \big\{T \in E'; |T(x)| \leq \|x\| \, \forall x \in E\big\}.$$

1. Montrer que

$$B \times B \ni (T, S) \mapsto d(T, S) := \sum_{p\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^p} \min\{|T(x_p) - S(x_p)|, 1\}$$

   est une distance sur B.

2. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de B et $T \in B$. Montrer l'équivalence

$$\Big(d(T_n, T) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\Big) \iff \Big(\forall x \in E,\ T_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} T(x)\Big).$$

Exercice 5 (Une application du théorème de Banach-Steinhaus aux séries de Fourier)**.** On note X l'espace des fonctions continues, 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On rappelle que le noyau de Dirichlet D_n est défini par

$$D_n(t) \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = \frac{\sin\big(n + \frac{1}{2}\big)t}{\sin \frac{t}{2}}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

1. Pour $f \in X$, on note $c_k(f)$ son k-ième coefficient de Fourier : $c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} \, \mathrm{d}t$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, les applications S_n définies par

$$S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t) \, \mathrm{d}t, \quad f \in X$$

   sont des formes linéaires continues sur X.

2. Montrer que

$$\|S_n\| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| \, \mathrm{d}t =: \|D_n\|_1.$$

3. Montrer que $\|D_n\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

4. En déduire qu'il existe des fonctions de X dont la série de Fourier ne converge pas en 0.