Université d'Aix-Marseille **Année 2018-2019**
L3 MPCI **Topologie**

TD 2 – Suites, applications continues dans un evn

Exercice 1 (Ouverts et fermés)**.** Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés.

1. Pour f et g deux applications continues de E dans F, montrer que l'ensemble $\{x \in E; f(x) = g(x)\}$ est un fermé de E.

2. En déduire que si f et g coïncident sur une partie dense de E, alors $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in E$.

Exercice 2 (Espace vectoriel des suites convergentes)**.** On note c l'ensemble des suites réelles convergentes. Pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c$, on note

$$\|x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|.$$

1. Montrer que pour tout $x \in c$, la quantité $\|x\|$ est finie.

2. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur l'espace vectoriel c. L'espace $(c, \|\cdot\|)$ est-il complet ?

3. Montrer que l'application ℓ de c dans $\mathbb{R}$ définie par $\ell(x) = \lim_{n\to\infty} x_n$, pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c$, est continue.

4. On note c_0 l'ensemble des suites réelles convergeant vers 0. Montrer que c_0 est fermé dans $(c, \|\cdot\|)$.

5. On note ℓ^∞ l'ensemble des suites réelles bornées muni de $\|\cdot\|$: montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur ℓ^∞, puis que c_0 est fermé dans $(\ell^\infty, \|\cdot\|)$.

6. Montrer que c_{00}, l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang, est dense dans $(c_0, \|\cdot\|)$ mais pas dans $(\ell^\infty, \|\cdot\|)$.

Exercice 3 (Application continue)**.** Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une application continue sur $(E, \|\cdot\|)$ espace vectoriel normé. Montrer que f est continue si, et seulement si, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, les ensembles $\{x \in E; f(x) > \lambda\}$ et $\{x \in E; f(x) < \lambda\}$ sont des ouverts de E.

Exercice 4 (Distance d'un point à une partie d'un evn)**.** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit A une partie de E. On définit la distance d'un point x de E à la partie A par

$$\delta_A(x) = d(x, A) = \inf\{\|x - y\|, y \in A\},$$

le rayon de la plus grande boule ouverte de centre x qui ne rencontre pas A (pourquoi ?).

1. Remarquer que si $x \in A$, alors $\delta_A(x) = 0$. La réciproque est-elle vraie ? (on pourra penser à l'exemple de $\mathbb{R}$ muni de la valeur absolue et de l'intervalle $]0, 1[$ avec $x = 0$).

2. Montrer que l'application δ_A de E dans $\mathbb{R}$ est continue (et même 1-lipschitzienne).

3. Montrer que si $x \in \overline{A}$, alors $\delta_A(x) = 0$.

4. Montrer que $\overline{A} = \{x \in E; \delta_A(x) = 0\}$.

Exercice 5 (Distance SNCF)**.** Pour $a, b \in \mathbb{R}^2$, on note $\delta(a, b) = \|a - b\|_2$ si a et b sont alignés avec l'origine O (ici, $\|\cdot\|_2$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$) et $\delta(a, b) = \|a\|_2 + \|b\|_2$ si a et b ne sont pas alignés avec O.

1. Montrer que δ est une distance sur $\mathbb{R}^2$. Cette distance provient-elle d'une norme ?

2. Soit $H = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_2 > 0\}$. Montrer que H est un ouvert dans $\mathbb{R}^2$ muni de la distance δ. Déterminer $\overline{H}$.

3. Les translations sont-elles continues sur $\mathbb{R}^2$ muni de la distance δ ? Les rotations de centre O ? Les homothéties de centre O ?