TD 3 – Espaces des fonctions continues sur un compact

Exercice 1 (Une généralisation du théorème de Dini)**.** Soit K un espace métrique compact et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathscr{C}(K)$ qui converge simplement vers $f \in \mathscr{C}(K)$. On suppose qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|f_{p+q} - f| \leq C|f_p - f| \quad \text{pour tout } p, q \in \mathbb{N}.$$

Pour $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $\Omega_n^\varepsilon = \{x \in K; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\}$.

1. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{p=0}^{n} \Omega_p^\varepsilon$ est un ouvert de K.
2. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\bigcup_{p=0}^{N} \Omega_p^\varepsilon = K$.
3. En remarquant que $\Omega_p^\varepsilon \subset \Omega_N^{C\varepsilon}$ pour tout $p \in \{0, ..., N\}$, en déduire que $K = \Omega_N^{C\varepsilon}$.
4. Conclusion ?

Exercice 2 (Famille équicontinue)**.**

1. Soit X un espace métrique et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathscr{C}(X)$. Montrer que si $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ est équicontinue en un point $x \in X$, alors pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X qui converge vers x, la suite $(f_n(x) - f_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. Soit $f_n(x) = \sin nx$, $x \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$. Montrer que $\{f_n, n \geq 1\}$ n'est équicontinue en aucun point $x \in \mathbb{R}$.

   Indication : considérer les points $x_n = x + \frac{\pi}{2n}$, $n \geq 1$.

Exercice 3 (Prolongement de fonctions continues)**.** Soit (X, d) un espace métrique et $K \subset X$ une partie compacte non vide. On note $\mathscr{C}_b(X)$ l'espace vectoriel des fonctions continues et bornées de X dans $\mathbb{R}$ muni de la norme définie par

$$\|f\| = \sup\{|f(x)|, x \in X\}, \quad f \in \mathscr{C}_b(X).$$

On munit $\mathscr{C}(K)$ de la norme uniforme notée aussi $\|\cdot\|$. On considère l'application linéaire Φ de $\mathscr{C}_b(X)$ dans $\mathscr{C}(K)$, restriction à K d'une fonction définie sur X.

1. Soit $f \in \mathscr{C}_b(X)$. Montrer qu'il existe $\tilde{f} \in \mathscr{C}_b(X)$ telle que $\Phi(f) = \Phi(\tilde{f})$ et $\|\tilde{f}\| = \|\Phi(f)\|$.

   Indication : on pourra choisir, si $\Phi(f) \neq 0$,

   $$\tilde{f} = \eta\Big(\frac{f}{\|\Phi(f)\|}\Big)\|\Phi(f)\|, \quad \text{où } \eta(t) = \frac{t}{\max\{1, |t|\}}, \ t \in \mathbb{R}.$$

2. Démontrer que $\mathrm{Im}(\Phi)$ est dense dans $\mathscr{C}(K)$.

   Indication : utiliser le théorème de Stone-Weierstraß.

3. Soit $g \in \mathscr{C}(K)$, limite uniforme d'une suite $\big(\Phi(f_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (a) Montrer qu'à suite extraite près on peut supposer que pour tout n, $\|\Phi(f_{n+1}) - \Phi(f_n)\| \leq \frac{1}{2^n}$.

   (b) Montrer alors que la série $\tilde{f}_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (\widetilde{f_{n+1} - f_n})$ converge dans $\mathscr{C}_b(X)$. On note f sa somme.

   (c) Montrer que $\Phi(f) = g$.

4. Déduire de ce qui précède que toute fonction $g \in \mathscr{C}(K)$ admet un prolongement en une fonction $f \in \mathscr{C}_b(X)$ vérifiant $\|f\| = \|g\|$.

5. Soit (E,d) un espace métrique et A une partie non vide de E. Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction k-lipschitzienne. Pour tout $x \in E$, on pose
$$g(x) = \inf_{y\in A}\big(f(y) + kd(y,x)\big).$$
Montrer que g est un prolongement k-lipschitzien de f à E. (Ceci est un résultat de McShane, 1934.)

Exercice 4 (Fonctions hölderiennes)**.** Soit $\alpha \in]0,1]$. On note $\mathscr{C}^\alpha([0,1]$ l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ telles que la quantité
$$|f|_\alpha := \sup_{x,y\in[0,1],x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}$$
est finie (on appelle ces fonctions les fonctions hölderiennes de rapport α). On note $\|\cdot\|$ la norme uniforme.

1. Que se passe-t-il lorsque $\alpha > 1$?
2. Montrer que $(\mathscr{C}^\alpha([0,1]), \|\cdot\| + |\cdot|_\alpha)$ est un espace de Banach. On note $\|\cdot\|_\alpha$ la norme $\|\cdot\| + |\cdot|_\alpha$.
3. Montrer que la boule unité fermée de $(\mathscr{C}^\alpha([0,1]), \|\cdot\| + |\cdot|_\alpha)$ est compacte dans $\mathscr{C}([0,1])$.
4. Soit maintenant $0 < \alpha < \beta < 1$.
   (a) Soit $f \in \mathscr{C}^\beta([0,1])$. Montrer que pour tout $\delta > 0$, on a
   $$|f|_\alpha \le \max\big\{|f|_\beta \delta^{\beta-\alpha}, 2\|f\|\delta^{-\alpha}\big\}.$$
   En déduire que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de $\mathscr{C}^\beta([0,1])$ qui converge uniformément (relativement à la norme $\|\cdot\|$) vers $f \in \mathscr{C}^\beta([0,1])$, alors $\|f_n - f\|_\alpha \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
   (b) En déduire que la boule unité fermée de $(\mathscr{C}^\beta([0,1]), \|\cdot\|_\beta)$ est compacte dans $\mathscr{C}([0,1])$.

Exercice 5. 1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathscr{C}^1([0,1])$.
   (a) On suppose que $f_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et qu'il existe une constante $M > 0$ telle que $\|f_n'\|_\infty \le M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe une suite extraite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $\mathscr{C}([0,1])$. La limite est-elle dans $\mathscr{C}^1([0,1])$?
   (b) On suppose maintenant qu'il existe une constante $M > 0$ telle que $\|f_n\|_\infty \le M$ et $\|f_n'\|_\infty \le M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe une suite extraite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $\mathscr{C}([0,1])$. La limite est-elle dans $\mathscr{C}^1([0,1])$?

2. Soit E un espace de Banach séparable et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $E' = \mathscr{L}(E, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$. On suppose qu'il existe une constante $M > 0$ telle que $|||T_n||| \le M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe une suite extraite $(T_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $T \in E'$ vérifiant
$$T_{\varphi(n)}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} T(x), \quad \forall\, x \in E.$$
On appelle T la limite faible de la suite $(T_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 6 (Théorème de Peano dans un cas particulier)**.** Soit f une fonction continue de $[0,1]\times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ pour laquelle il existe une constante $M > 0$ telle que
$$|f(t,x)| \le M(1+|x|), \quad \forall\, t \in [0,1],\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 1$. Pour $0 \le k \le n$, on définit les point x_k^n par
$$x_0^n = 0, \quad \text{et, pour } 0 \le k \le n-1,\ x_{k+1}^n = x_k^n + \tfrac{1}{n}\, f\big(\tfrac{k}{n}, x_k^n\big).$$

(a) Montrer que pour tout $0 \leq k \leq n$, on a $|x_k^n| \leq \left(1 + \frac{M}{n}\right)^k - 1 \leq e^M - 1$.

(b) Soit ϕ_n la fonction continue sur $[0,1]$, affine sur chaque intervalle $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ telle que $\phi_n\left(\frac{k}{n}\right) = x_k^n$ pour $0 \leq k \leq n$. Montrer que

$$|\phi_n(t) - \phi_n(s)| \leq M e^M |t - s|, \quad \forall\, t, s \in [0,1].$$

(c) Pour $s \in [0,1]$, on définit $\psi_n(0) = f(0,0)$ et

$$\psi_n(s) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\left]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]}(s) f\left(\tfrac{k}{n}, \phi_n\left(\tfrac{k}{n}\right)\right), \quad s \in]0,1].$$

Montrer que

$$\phi_n(t) = \int_0^t \psi_n(s)\, \mathrm{d}s, \quad \forall\, t \in [0,1].$$

2. (a) Montrer qu'il existe une suite extraite $(\phi_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de $(\phi_n)_{n\geq 1}$ qui converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction $\phi \in \mathscr{C}([0,1])$.

(b) Montrer que la suite $(\psi_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers $s \mapsto f\big(s, \phi(s)\big)$.

(c) En déduire que

$$\phi(t) = \int_0^t f(s, \phi(s)\, \mathrm{d}s, \quad \forall\, t \in [0,1],$$

puis que $\phi \in \mathscr{C}^1([0,1])$ et vérifie l'équation différentielle suivante

$$\phi(0) = 0 \quad \text{et} \quad \phi'(t) = f(t, \phi(t), \quad \forall\, t \in [0,1].$$

La fonction ϕ construite ici est-elle la seule à vérifier ces conditions ?