TD 3 – Compacité

Exercice 1 (Compact de $\mathbb{R}^2$)**.** On définit l'ensemble suivant de $\mathbb{R}^2$, muni de la norme $\|(x,y)\| = \max\{|x|,|y|\}$

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 = 1, y > 0\}.$$

1. Faire un dessin. L'ensemble A est-il fermé ? ouvert ? compact ?

2. Déterminer l'adhérence de A : est-ce un ensemble compact ?

3. Soit $\theta \in [0, 2\pi[$. Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de points de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées $(\cos(n\theta), \sin(n\theta))$, $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(P_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2 (Suite convergente)**.** Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$. On note x sa limite. Montrer que l'ensemble

$$\{x_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\} \quad \text{est compact dans } E.$$

Exercice 3 (Application localement bornée)**.** Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. Soit K un compact de E et $f : K \to F$ une application localement bornée ; c'est-à-dire que pour tout $x \in K$, il existe $r_x > 0$ et $M_x > 0$ tels que $\|f(y)\|_F \leq M_x$ pour tout $y \in K$, $\|y - x\|_E < r_x$.

Montrer que f est bornée sur K ; c'est-à-dire qu'il existe $M > 0$ telle que $\|f(y)\|_F \leq M$ pour tout $y \in K$.

Exercice 4 (Application continue)**.** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $f : [0,1] \times E \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[0,1] \times E$. On définit $g : E \to \mathbb{R}$ par

$$g(x) = \int_0^1 f(t,x)\,\mathrm{d}t, \quad x \in E.$$

1. Soit $x \in E$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $t \in [0,1]$, il existe $r = r(\varepsilon, t, x) > 0$ et $\delta = \delta(\varepsilon, t, x) > 0$ tels que
$$|f(t,x) - f(s,y)| \leq \varepsilon \quad \text{pour tout } s \in]t-\delta, t+\delta[\cap [0,1] \text{ et tout } y \in B(x,r).$$

2. Montrer qu'on peut trouver $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < ... < t_N < t_{N+1} = 1 \in [0,1]$ tels que $[0,1] = [0,t_1] \cup [t_1,t_2] \cup ... \cup [t_N, 1]$ et pour tout $k = 0, ..., N$ $[t_k, t_{k+1}] \subset]t'_k - \delta(\varepsilon, t'_k, x), t'_k + \delta(\varepsilon, t'_k, x)[$ pour un certain $t'_k = t'_k(\varepsilon, x) \in [0,1]$.

3. En déduire que g est continue sur E.

Exercice 5 (Point fixe)**.** Soit K un compact de $(E, \|\cdot\|)$ espace vectoriel normé. Soit $f : K \to K$ vérifiant $\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$ pour tout $x, y \in K$, $x \neq y$.

1. Supposons que $a \in K$ et $b \in K$ vérifient $a = f(a)$ et $b = f(b)$. Montrer alors que $a = b$.

2. On définit par récurrence la suite d'ensemble $K_0 = K$ et $K_{n+1} = \{f(x), x \in K_n\} = f(K_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, K_n est compact et $K_{n+1} \subset K_n$.
   (b) En déduire que $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ est non vide.
   (c) Montrer que pour tout $y \in F$, on a $f(y) \in F$.
   (d) Montrer que $\sup\{\|y - y'\|, y, y' \in F\} = 0$. (On pourra raisonner par l'absurde.)

3. Montrer que f admet un unique point fixe $a \in K$ vérifiant :
$$\forall\, x \in K, \text{ la suite } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ définie par récurrence par } x_0 = x, x_{n+1} = f(x_n), n \in \mathbb{N} \text{ converge vers } a.$$