TD 4 – Espaces $\mathscr{C}(K)$ et L^p

Exercice 1 (Théorème de Stone-Weierstrass)**.** 1. Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit $f \in \mathscr{C}([a,b])$ vérifiant $\int_a^b t^n f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Que peut-on dire de f ?

2. Soit $f \in \mathscr{C}_b(\mathbb{R})$. Montrer que f n'est pas limite uniforme de polynômes de $\mathbb{R}[X]$.

3. Soit K_1 et K_2 deux espaces métriques compacts. Soit $\mathscr{A}$ l'ensemble des combinaisons linéaires finies f de la forme

$$f(x,y) = \sum_{i \in I} \lambda_i u_i(x) v_i(y), \quad x \in K_1, y \in K_2, \quad u_i \in \mathscr{C}(K_1), v_i \in \mathscr{C}(K_2), \lambda_i \in \mathbb{R}, I \text{ fini.}$$

Montrer que $\mathscr{A}$ est dense dans $\mathscr{C}(K_1 \times K_2)$.

Exercice 2 (Théorème d'Ascoli)**.** 1. Soit $k > 0$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions k-lipschitziennes de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$ vérifiant $\|f_n(0)\| \leq 1$.

(a) Montrer que pour tout $R > 0$, on peut extraire de la suite $(f_{n|_{B_R}})_{n\in\mathbb{N}}$ (restrictions de f_n à la boule $B_R = \{x \in \mathbb{R}^d; \|x\| \leq R\}$) une suite convergente dans $\mathscr{C}(B_R, \mathbb{R}^d)$.

(b) Montrer, en utilisant le procédé diagonal de Cantor qu'on peut extraire une suite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge simplement sur $\mathbb{R}^d$. La convergence est-elle uniforme ?

2. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de $\mathscr{C}_b([0,\infty[)$ définie par

$$f_n(t) = \sin\sqrt{t + 4\pi^2 n^2}, \quad t \geq 0.$$

(a) Montrer qu'il s'agit d'une famille équicontinue qui converge simplement vers la fonction nulle.

(b) La suite $(f_n)_{n\geq 1}$ est-elle relativement compacte dans $(\mathscr{C}_b([0,\infty[), \|\cdot\|_\infty)$?

3. Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit $k \in \mathscr{C}([a,b] \times [a,b])$. On définit

$$Kf(t) = \int_a^b k(t,s) f(s)\,\mathrm{d}s, \quad t \in [a,b],\ f \in \mathscr{C}([a,b]).$$

Montrer que K est un opérateur compact de $(\mathscr{C}([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$.

Exercice 3 (Dérivabilité de la norme p)**.** Soit $1 < p < \infty$. Soit f et g deux fonctions de $L^p(\mu)$. On note

$$N(t) = \int_\Omega |f + tg|^p\,\mathrm{d}\mu, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Montrer que N est dérivable sur $\mathbb{R}$. Que vaut $N'(0)$?

Exercice 4 (Opérateur à noyau)**.** Soit $1 < p < \infty$ et p' l'exposant conjugu de p ($\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$). Soit $K :]0,+\infty \times]0,+\infty[\to [0,+\infty[$ une fonction mesurable satisfaisant les hypothèses

(i) pour tout $\lambda > 0$, pour tout $x, y \in]0,+\infty[$, on a $\lambda K(\lambda x, \lambda y) = K(x,y)$;

(ii) $\displaystyle\int_0^{+\infty} K(1,y) y^{-1/p}\,\mathrm{d}y = k \in]0,+\infty[$.

1. Montrer que $\int_0^{+\infty} K(x,1)x^{-1/p'}\,\mathrm{d}x = k$.

2. On définit pour $f \in L^p(0,\infty)$

$$Tf(x) = \int_0^{+\infty} K(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y, \quad x \in]0,+\infty[.$$

Montrer que T est un opérateur linéaire continu de $L^p(0,\infty)$ dans lui-même, de norme inférieure ou égale à k.

Indication : majorer d'abord $|Tf(x)|$ en écrivant pour $x, y > 0$

$$K(x,y) = K(x,y)^{1/p}\Big(\frac{y}{x}\Big)^{1/pp'} K(x,y)^{1/p'}\Big(\frac{x}{y}\Big)^{1/pp'}$$

et en utilisant l'inégalité de Hölder.

3. On suppose de plus que $K(1,y) \leq 1$ pour tout $y > 0$. Pour $\varepsilon > 0$, on pose

$$k_\varepsilon = \int_0^{+\infty} K(1,y)y^{-\frac{1+\varepsilon}{p}}\,\mathrm{d}y,$$

$$f_\varepsilon(x) = \mathbb{1}_{\{x\geq 1\}}x^{-\frac{1+\varepsilon}{p}}, \quad g_\varepsilon(x) = \mathbb{1}_{\{x\geq 1\}}x^{-\frac{1+\varepsilon}{p'}}, \quad x > 0.$$

   (a) Vérifier que $f_\varepsilon \in L^p(0,\infty)$ et $g_\varepsilon \in L^{p'}(0,\infty)$.

   (b) Montrer que pour tout $\varepsilon < \frac{p}{2p'}$, on a

$$\int_0^{+\infty} Tf_\varepsilon(x)g_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x \geq \big(k_\varepsilon - 2(p')^2\varepsilon\big)\|f_\varepsilon\|_p\|g_\varepsilon\|_{p'}.$$

   (c) En déduire que $\|T\|_{\mathscr{L}(L^p(0,\infty))} = k$.

4. Montrer que les applications $K(x,y) = \frac{1}{x+y}$ et $K(x,y) = \frac{1}{\max\{x,y\}}$, $x, y > 0$, satisfont aux hypothèses (i) et (ii) pour tout $1 < p < \infty$. Calculer dans ce cas la norme de l'opérateur T correspondant.

Indication : on rappelle que pour $\alpha > 1$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{\alpha}\,\sin\Big(\frac{\pi}{\alpha}\Big)$.

Exercice 5 (Noyau de la chaleur)**.** Soit $p_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\,e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$, $x \in \mathbb{R}^d$, $t > 0$.

1. Montrer que pour tout $t > 0$, $\int_{\mathbb{R}^d} p_t(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

2. Montrer que pour tout $\delta > 0$, $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \int_{\{|x|>\delta\}} p_t(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

3. Soit $g \in \mathscr{C}_c(\mathbb{R}^d)$. Montrer que $p_t * g$ est bien définie pour tout $t > 0$ et que

$$\lim_{t\to 0^+} p_t * g(x) = g(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^d.$$

4. Soit $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Montrer que pour tout $t > 0$, $p_t * g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et que $\|p_t * g - g\|_p \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$.