TD 4 – Espaces vectoriels normés en dimension finie

Exercice 1 (Fonctions propres)**.** Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une fonction continue. On dit que f est *propre* si l'image réciproque de tout compact est compact.

1. Montrer que si f est propre, alors l'image d'un fermé par f est fermé.
2. Montrer que f est propre si, et seulement si, $\|f(x)\| \xrightarrow[\|x\|\to+\infty]{} +\infty$.

Exercice 2 (Normes matricielles)**.** On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices $n \times n$ à coefficients réels. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. On définit la "norme triple" sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par

$$|||A||| = \sup_{\|x\|\le 1, x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}, \quad \forall\, A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).$$

1. Quelle est la norme triple associée à la norme $\|\cdot\|_1$ sur $\mathbb{R}^n$? Quelle est celle associée à la norme $\|\cdot\|_2$?
2. Montrer que $|||\cdot|||$ est une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant
$$|||AB||| \le |||A||||||B|||, \quad \forall\, A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).$$
3. Toute norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est-elle une norme triple ?

Exercice 3. Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note E_n le sous-espace vectoriel de E des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Pourquoi E_n est-il de dimension finie ? Quelle est sa dimension ? Donner une base de E_n.
   (b) Montrer que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = E$.
   (c) E est-il de dimension finie ?
2. On définit
$$\|P\| = \max\{|a_j|, j = 0, 1, ..., d\} \quad \text{pour } P = a_0 + a_1X + ... + a_dX^d \in E.$$
   (a) Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur E.
   (b) Montrer que $N_n : E_n \to [0, \infty[$, $N_n(P) = \|P\|$ est une norme sur E_n.
3. Soit $\ell : E \to E$ définie par $\ell(P) = P'$ (le polynôme dérivé de P).
   (a) Montrer que ℓ est continue sur (E_n, N_n) pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) L'application ℓ est-elle continue sur $(E, \|\cdot\|)$?

Exercice 4 (Applications linéaires)**.** Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Soit $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications linéaires de E dans F. On munit $\mathscr{L}(E, F)$ de la norme triple.

1. Rappeler pourquoi toute application $\ell \in \mathscr{L}(E, F)$ est uniformément continue.
2. Soit $\ell \in \mathscr{L}(E, F)$. Montrer que $\ell_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ dans $\mathscr{L}(E, F)$ si, et seulement si, $(\ell_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans F pour tout $x \in E$.
3. On suppose maintenant qu'il existe $r > 0$ et $M > 0$ tels que pour tout $x \in E$ avec $\|x\|_E \le r$, on a la majoration $\|\ell_n(x)\|_F \le M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'on peut trouver une suite extraite de $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $\mathscr{L}(E, F)$.