TD 6 – Transformée de Fourier

Exercice 1 (Parties relativement compactes de ℓ^p). 1. Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. Montrer que A est précompacte si, et seulement si, A est bornée et si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe F_ε un sous-espace vectoriel de E de dimension finie tel que pour tout $x \in A$, $d(x, F_\varepsilon) \leq \varepsilon$.

2. Soit $1 \leq p < \infty$. Soit $A \subset \ell^p(\mathbb{N})$.

   (a) On suppose que A est bornée et vérifie : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\left(\sum_{n \geq N} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon$ pour tout $x \in A$. Montrer que A est relativement compacte dans $\ell^p(\mathbb{N})$.

   (b) Montrer que l'implication précédente est une équivalence. Comparer avec le théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov.

Exercice 2 (Transformée de Fourier d'une gaussienne). Soit $a > 0$. Pour $x \in \mathbb{R}^d$, on note $|x|$ sa norme euclidienne. Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{-a|x|^2}$.

1. Montrer que $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, puis calculer $\int_{\mathbb{R}^d} |f|$.
2. On suppose dans cette question que $d = 1$. Montrer que $\mathscr{F}(f)$ (la transformée de Fourier de f) vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 2. Résoudre cette équation différentielle.
3. Dans le cas général où $d \geq 1$, déterminer la transformée de Fourier de f.

Exercice 3 (Équation de la chaleur). Soit $d \geq 1$. Soit $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.

1. On suppose qu'il existe $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ telle que $u - \Delta u = f$, où $\Delta = \sum_{k=1}^d \partial_k^2$.

   (a) Montrer que $\hat{u}$, la transformée de Fourier de u, vérifie $(1 + |\xi|^2)\hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$.

   (b) Montrer qu'il existe une unique fonction $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ vérifiant $u - \Delta u = f$.

2. Montrer qu'il existe $u :]0, +\infty[\times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ vérifiant $\partial_t u - \Delta u = 0$ sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}^d$ vérifiant $\|u(t, \cdot) - f\|_2 \xrightarrow[t \to 0^+]{} 0$.

   Indication : voir aussi l'exercice 5 du TD 4.

Exercice 4 (Calcul de transformées de Fourier). 1. Soit $a > 0$. On note $f(x) = e^{-a|x|}$, $x \in \mathbb{R}$.

   (a) Montrer que $f \in L^1(\mathbb{R})$, et calculer la transformée de Fourier de f.

   (b) En déduire la valeur, en fonction de $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$ de $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos bx}{a^2 + x^2}\,\mathrm{d}x$.

2. Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{1}{1+|x|}$, $x \in \mathbb{R}$.

   Montrer que $g \in L^2(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R})$, puis Calculer la transformée de Fourier de g.

Exercice 5 (Transformée de Hilbert). Pour $0 < \varepsilon < M < \infty$ et $f \in L^2(\mathbb{R})$, on définit

$$H_{\varepsilon,M} f(x) = \int_{\varepsilon < |y| < M} \frac{f(x-y)}{y}\,\mathrm{d}y, \quad \text{p.p. } x \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$, $H_{\varepsilon,M} f \in L^2(\mathbb{R})$.
2. Donner l'expression de la transformée de Fourier de $H_{\varepsilon,M} f$ en fonction de la transf. de Fourier de f.
3. Montrer que pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$, $\left(H_{\varepsilon,M} f\right)_{0<\varepsilon<M<\infty}$ converge dans $L^2(\mathbb{R})$ ($\varepsilon \to 0^+$, $M \to +\infty$).