TD 7 – Espaces de Hilbert

Exercice 1 (Projection sur un sous-espace vectoriel fermé)**.** Soit $H = L^2(-1,1)$. On définit les deux parties de H suivantes : $F = \{f \in H; \int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = 0\}$ et $G = \{f \in H; \int_{-1}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels fermés de H. Quelle est la dimension de F ? Et celle de G ?

2. Déterminer $F^\perp$ et $G^\perp$.

3. Déterminer les projections orthogonales P_F sur F et P_G sur G.

Exercice 2 (Projection sur des parties convexes de L^2)**.** Soit $E = L^2(\mathbb{R}^d)$.

1. Soit $C = \{f \in E; f \geq 0 \text{ p.p.}\}$.
   (a) Montrer que C est une partie convexe fermée non vide de E.
   (b) Déterminer la projection P_C sur C.

2. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, avec $\alpha < \beta$. Soit $K = \{f \in E; \alpha \leq f \leq \beta \text{ p.p.}\}$.
   (a) Montrer que K est non vide si, et seulement si, $\alpha\beta \leq 0$.
   On suppose à partir de maintenant que $\alpha\beta \leq 0$.
   (b) Montrer que K est une partie convexe fermée non vide de E.
   (c) Montrer que P_K définie par
   $$P_K(f) = \max\{\min\{f, \beta\}, \alpha\} = \alpha \mathbb{1}_{f<\alpha} + f\mathbb{1}_{\alpha \leq f \leq \beta} + \beta \mathbb{1}_{f>\beta}, \quad f \in E$$
   représente la projection orthogonale de f sur K.

Exercice 3 (Exemple de non existence de la projection)**.** On considère l'espace $E = \mathscr{C}[0,1]$ muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f|$, $f \in E$. On pose $F = \{f \in E; f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel fermé de E.

2. Soit $g \in E$. Montrer que $d(g,F) = \inf_{f\in F} \|g - f\|_\infty$ vérifie $d(g,F) \geq \left|\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t\right|$.

3. On suppose que $g \in E \setminus F$. Montrer qu'il n'existe pas de $f \in F$ tel que $\|g - f\|_\infty = \left|\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t\right|$.

4. Soit $g \in E \setminus F$ telle que $g(0) = 0$ et $g(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0,1]$. Montrer que $d(g,F) = \left|\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t\right|$.

5. Conclusion ?

Exercice 4 (Bases hilbertiennes - Séries de Fourier)**.** Soit A une partie de $\mathbb{Z}$ et E_A le sous-espace vectoriel de $L^2(0,2\pi)$ défini par

$$E_A = \left\{f \in L^2(0,2\pi); \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t = 0,\ \forall n \in A\right\}.$$

1. Déterminer $E_{\mathbb{Z}}$.

2. Montrer que pour tout $A \subset \mathbb{Z}$, E_A est fermé. Déterminer une base hilbertienne de E_A.
3. Quel est le supplémentaire orthogonal de E_A ?
4. Expliciter le projecteur orthogonal sur E_A. Dans quel(s) cas ce projecteur est-il un opérateur compact de $L^2(0, 2\pi)$?

Exercice 5 (Polynômes de Tchebychev[1])**.** On définit la mesure de Radon positive μ sur $[-1, 1]$ par

$$\mu(\phi) = \int_{-1}^{1} \phi(x)(1 - x^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}x, \quad \text{pour tout } \phi \in \mathscr{C}[-1, 1].$$

1. Pour $x \in [-1, 1]$, on pose $T_0(x) = \sqrt{1/\pi}$ et $T_n(x) = \sqrt{2/\pi}\cos\big(n \arccos x\big)$, $n \geq 1$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est la restriction à $[-1, 1]$ d'un polynôme de degré n.
2. Montrer que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $L^2(]-1, 1[, \mu)$.

Exercice 6 (Espace de Bergman)**.** On note $\mathbb{D}$ le disque unité (ouvert) dans $\mathbb{C}$. Soit $A^2(\mathbb{D})$ l'espace des fonctions holomorphes dans $\mathbb{D}$ (c'est-à-dire que les fonctions de $A^2(\mathbb{D})$, définies sur $\mathbb{D}$ sont développables en série entière en tout point de $\mathbb{D}$), de carré intégrable sur $\mathbb{D}$.

1. Montrer que $A^2(\mathbb{D})$ muni de la norme

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{D})} = \Big(\int_{x^2+y^2<1} |f(x + iy)|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big)^{\frac{1}{2}}, \quad f \in A^2(\mathbb{D}),$$

   est un espace de Hilbert.

   On utilisera, sans démonstration, que pour une fonction holomorphe f sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, on a la formule de la moyenne :

$$f(a) = \frac{1}{\pi r^2}\int_{|x+iy-a|<r} f(x + iy)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad \forall\, a \in \Omega,\ \forall\, r > 0 \text{ tel que } B(a, r) \subset \Omega.$$

   On admettra de plus qu'une fonction limite uniforme sur tout compact d'une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert est holomorphe sur cet ouvert.

2. Montrer qu'une base hilbertienne de $A^2(\mathbb{D})$ est donnée par $\big\{e_n, n \in \mathbb{N}\big\}$ où $e_n(z) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\, z^n$, $z \in \mathbb{D}$.

[1] de : Pafnouti Tchebychev (1821-1894) mathématicien russe (orthographe anglo-saxonne : Pafnuty Chebyshev)