Université d'Aix-Marseille **Année 2019-2020**
M1 Mathématiques et applications **Analyse fonctionnelle**

DM1 : Espaces de suites

Pour $p \geq 1$, on note ℓ^p l'ensemble des suites de nombres complexes $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la série de terme général $(|a_n|^p)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note ℓ^∞ l'ensemble des suites bornées de nombres complexes, c l'ensemble des suites convergentes de nombres complexes, c_0 l'ensemble des suites convergentes vers 0 et c_{00} l'ensemble des suites dont les termes sont nuls à partir d'un certain rang.

Pour $a \in \ell^p$, on note

$$\|a\|_p = \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$

et pour $a \in \ell^\infty$, $\|a\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$.

1. Montrer que $c_{00} \subset c_0 \subset c \subset \ell^\infty$ puis que $\ell^p \subset \ell^q$ si $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Donner un exemple de suite de ℓ^2 qui n'appartient pas à ℓ^1.

2. Montrer que $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ est un espace vectoriel normé complet pour tout $1 \leq p \leq \infty$.

3. Qu'en est-il de $(c, \|\cdot\|_\infty)$? de $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$? de $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$?

4. Quelle est l'adhérence de c_{00} dans ℓ^∞ ? Et l'adhérence de ℓ^p dans ℓ^∞, $1 \leq p < \infty$?

5. Montrer que pour $1 \leq p < \infty$, ℓ^p est séparable.

6. Montrer que ℓ^∞ n'est pas séparable.

   Indication : on pourra utiliser le fait que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable.

7. Montrer que $(c, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach séparable.