Université d'Aix-Marseille **Année 2018-2019**
L2 Maths **Topologie et Calcul Différentiel**

Devoir maison

à rendre le 26 Février 2019

1. Soit $\lambda > 0$. Pour tout entier $n \geq 1$, on note B_n le disque

$$B_n = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \left(x - \frac{1}{n}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{n}\right)^2 \leq \frac{\lambda^2}{n^2} \right\}.$$

   (a) A quelle condition sur λ a-t-on $B_{n+1} \subset B_n$.

   (b) Soit $B = \bigcup_{n \geq 1} B_n$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que B soit fermé.

2. Déterminer l'intérieur et l'adhérence des parties de $\mathbb{R}^2$ suivantes :

$$\begin{aligned}
A &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x > 0\right\} \\
B &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ xy = 1\right\} \\
C &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ xy \geq 1\right\} \\
D &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2\right\} \setminus \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 < 1\right\} \\
E &= A \cap C \\
F &= A \setminus B.
\end{aligned}$$

3. Soient A, B deux parties de $\mathbb{R}^n$ muni de la norme $\|\cdot\|$.

   (a) On suppose $A \subset B$. Démontrer que $\mathring{A} \subset \mathring{B}$ et que $\bar{A} \subset \bar{B}$.

   (b) Démontrer que $(A \cap B)^\circ = \mathring{A} \cap \mathring{B}$ et que $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset (A \cup B)^\circ$, mais que l'inclusion peut être stricte.

   (c) Comparer $\overline{A \cap B}$ et $\bar{A} \cap \bar{B}$, puis $\overline{A \cup B}$ et $\bar{A} \cup \bar{B}$.

On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles carrées $n \times n$ que l'on munit de la norme infinie : $\|A\| = \max\{|a_{i,j}|, 1 \leq i, j \leq n\}$, pour tout $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

4. Soit $GL_n(\mathbb{R})$ les matrices réelles $n \times n$ inversibles.

   (a) Montrer que l'application déterminant det : $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est continue.

   (b) En déduire que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

   (c) Montrer que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \setminus GL_n(\mathbb{R})$ est fermé dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

   (d) (question bonus) Montrer que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \setminus GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas compact dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.