Université d'Aix-Marseille | **Année 2019-2020**
M1 Mathématiques et applications | **Analyse fonctionnelle**

DM2 : Théorème de Peano

Soit f une fonction continue de $[0,1] \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ pour laquelle il existe une constante $M > 0$ telle que

$$|f(t,x)| \leq M(1+|x|), \quad \forall\, t \in [0,1],\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Pour $0 \leq k \leq n$, on définit les point x_k^n par

$$x_0^n = 0, \quad \text{et, pour } 0 \leq k \leq n-1,\ x_{k+1}^n = x_k^n + \tfrac{1}{n} f\big(\tfrac{k}{n}, x_k^n\big).$$

   (a) Montrer que pour tout $0 \leq k \leq n$, on a $|x_k^n| \leq \big(1 + \frac{M}{n}\big)^k - 1 \leq e^M - 1$.

   (b) Soit ϕ_n la fonction continue sur $[0,1]$, affine sur chaque intervalle $\big[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\big]$ telle que $\phi_n\big(\frac{k}{n}\big) = x_k^n$ pour $0 \leq k \leq n$. Montrer que

$$|\phi_n(t) - \phi_n(s)| \leq M e^M |t-s|, \quad \forall\, t,s \in [0,1].$$

   (c) Pour $s \in [0,1]$, on définit $\psi_n(0) = f(0,0)$ et

$$\psi_n(s) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\left]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]}(s) f\big(\tfrac{k}{n}, \phi_n(\tfrac{k}{n})\big), \quad s \in]0,1].$$

   Montrer que

$$\phi_n(t) = \int_0^t \psi_n(s)\,\mathrm{d}s, \quad \forall\, t \in [0,1].$$

2. (a) Montrer qu'il existe une suite extraite $(\phi_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de $(\phi_n)_{n\geq 1}$ qui converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction $\phi \in \mathscr{C}([0,1])$.

   (b) Montrer que la suite $(\psi_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers $s \mapsto f\big(s, \phi(s)\big)$.

   (c) En déduire que

$$\phi(t) = \int_0^t f(s, \phi(s))\,\mathrm{d}s, \quad \forall\, t \in [0,1],$$

   puis que $\phi \in \mathscr{C}^1([0,1])$ et vérifie l'équation différentielle suivante

$$\phi(0) = 0 \quad \text{et} \quad \phi'(t) = f(t, \phi(t)), \quad \forall\, t \in [0,1].$$

   La fonction ϕ construite ici est-elle la seule à vérifier ces conditions ?