Faculté des Sciences
Aix*Marseille Université

Année universitaire 2018/2019

Site : ☐ Luminy ☒ St-Charles ☐ St-Jérôme ☐ Cht-Gombert ☐ Aix-Montperrin ☐ Aubagne-SATIS
Sujet de : ☐ 1er semestre ☒ 2ème semestre ☐ Session 2 Durée de l'épreuve : 2h
Examen de : L2 Nom du diplôme : Licence de mathématiques
Code du module : SMI4U05TC Libellé du module : Topologie et Calcul différentiel 1
Calculatrices autorisées : NON Documents autorisés : NON

Il sera tenu compte de la rédaction dans la note finale. Tous les théorèmes utilisés doivent être énoncés en entier : hypothèses et conclusions (on ne demande pas leur démonstration sauf indication contraire).

Questions de cours.

1. Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$). Montrer que la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ pour la norme N est convexe.
2. Soit $n, p \geq 1$. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une fonction continue. Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$.
   (a) Que peut-on dire des propriétés topologiques de $f(K)$ comme sous-ensemble de $\mathbb{R}^p$?
   (b) Démontrez-le.
3. Soit $n \geq 2$. Énoncer et démontrer l'inégalité des accroissements finis pour une fonction définie sur un convexe de $\mathbb{R}^n$ à valeurs réelles.

Exercice 1. Soit $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^3 + y^3 \leq 1\}$.

1. L'ensemble B est-il fermé ? Est-il borné ? Est-il convexe ?
2. Peut-on conclure des réponses à la question précédente si B est la boule unité de $\mathbb{R}^2$ pour une certaine norme ?

Exercice 2. Soit $A = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y = 1, 0 < y < 1\big\}$ et $B = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y < 1, 0 \leq y \leq 1\big\}$.

1. Dessinez les ensembles A et B sur deux graphiques différents (on précisera ce qui est et ce qui n'est pas dans l'ensemble).
2. Les ensembles A et B sont-ils ouverts dans $\mathbb{R}^2$? fermés ? (on justifiera les réponses).
3. Déterminez l'adhérence et l'intérieur de A et B (en justifiant vos réponses).

Exercice 3. Soit $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$ et $f : B \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \frac{(y-\frac{1}{2})\sin(x-\frac{1}{2})^2}{x^2+y^2-x-y+\frac{1}{2}}$ si $(x, y) \neq (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

1. Peut-on donner à f une valeur en $(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ pour que f soit continue sur B ?
2. Montrer que f est bornée sur B.
3. La fonction f admet-elle des dérivées partielles par rapport à x et à y en tout point de B ?
4. Déterminer le sous-ensemble de B où f est différentiable.
5. Déterminer $Df(0, 0)$ si cette différentielle existe.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

1. Dire pourquoi f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. La fonction f est-elle bornée sur $\mathbb{R}^2$?
3. Déterminer les points critiques de f.
4. Calculer les dérivées partielles secondes en chacun des points critiques de f, puis déterminer si les points critiques sont des extremums locaux. On précisera si ce sont des minimums ou des maximums.