Université d'Aix-Marseille, Master 1 Mathématiques et Applications Année 2019-2020

Analyse fonctionnelle et analyse de Fourier

Contrôle 1 - Semaine du 8 octobre 2019

Merci d'accorder un grand soin à la rédaction et de justifier les réponses !

Exercice 1. Soit (E, d) un espace métrique et F un fermé de E. Pour $x \in E$, on note $\mathrm{dist}(x, F) = \inf \{d(x, y) : y \in F\}$. Montrer que $\mathrm{dist}(x, F) = 0$ si et seulement si $x \in F$.

Exercice 2. Soit (E, d) un espace métrique, soit Ω un ouvert de E, et soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de compacts de E. On suppose que $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n \subset \Omega$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $K_n \subset \Omega$.

Exercice 3. Soit $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in E$, on note

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt \quad \text{et} \quad \|f\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} |f(t)|.$$

1. Vérifier que $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_\infty$ sont bien des normes sur E.
2. L'espace $(E, \| \ \|_\infty)$ est-il un espace de Banach ?
3. L'espace $(E, \| \ \|_1)$ est-il un espace de Banach ?
4. Les normes $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_\infty$ sur E sont-elles équivalentes ?
5. Soit $g \in E$. On munit $\mathbb{R}$ de la norme usuelle (la valeur absolue) et on considère l'application
$$\begin{array}{rcl} u : (E, \| \ \|_\infty) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & u(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt. \end{array}$$
L'application u est-elle linéaire continue ?
6. Si oui, quelle est sa norme $|||u|||$?
Indication : on trouvera d'abord un majorant immédiat de $|||u|||$ et on pourra ensuite considérer les fonctions $f_n = \dfrac{n\, g}{n\, |g| + 1}$.