Université d'Aix-Marseille | **Année 2018-2019**
L2 maths St Charles | **Topologie-Calcul différentiel**

Interrogation 1

1. On suppose que N est une norme sur $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$). Soit $\alpha > 0$. Montrer que $\alpha N : x \mapsto \alpha N(x)$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Pour $\alpha > 0$, l'application $\alpha N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ prend des valeurs positives.

- D'autre part, αN vérifie la condition de séparativité : soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\alpha N(x) = 0$. Comme $\alpha > 0$, on a $N(x) = 0$; et comme N est une norme, $x = 0$.
- multiplication par un scalaire : pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^n$, on a
  $\alpha N(\lambda x) \underset{\text{car } N \text{ est une norme}}{=} \alpha |\lambda| N(x) = |\lambda| \alpha N(x)$: αN vérifie la condition de multiplication par un scalaire.
- inégalité triangulaire : pour $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a
  $\alpha N(x+y) \underset{\text{car } \alpha > 0 \text{ et } N \text{ est une norme}}{\leq} \alpha (N(x) + N(y)) \leq \alpha N(x) + \alpha N(y)$: les inégalités sont conservées dans le même sens par multiplication par un réel positif.

2. Soit N et N' deux normes sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\max\{N, N'\} : x \mapsto \max\{N(x), N'(x)\}$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

$\max\{N, N'\}$ prend des valeurs positives

- séparativité :
  Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\max\{N(x), N'(x)\} = 0$: alors on a à la fois $N(x) = 0$ et $N'(x) = 0$
  ce qui implique (car N et N' sont des normes) que $x = 0$
- multiplication par un scalaire : $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$
  $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$
  $N'(\lambda x) = |\lambda| N'(x)$ car N et N' sont des normes.

  d'où : $\max\{N(\lambda x), N'(\lambda x)\} = |\lambda| \max\{N(x), N'(x)\}$
- inégalité triangulaire : pour $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a
  $N(x+y) \underset{N \text{ est une norme}}{\leq} N(x) + N(y) \leq \max\{N(x), N'(x)\} + \max\{N(y), N'(y)\}$
  car $N(x) \leq \max\{N(x), N'(x)\}$ et $N(y) \leq \max\{N(y), N'(y)\}$

  de même :
  $N'(x+y) \leq N'(x) + N'(y) \leq \max\{N(x), N'(x)\} + \max\{N(y), N'(y)\}$

  et donc $\max\{N(x+y), N'(x+y)\} \leq \max\{N(x), N'(x)\} + \max\{N(y), N'(y)\}$

3. Si on note B_N la boule unité de $\mathbb{R}^n$ pour la norme N et $B_{N'}$ la boule unité de $\mathbb{R}^n$ pour la norme N', montrer que $B_N \cap B_{N'}$ est la boule unité de $\mathbb{R}^n$ pour la norme $\max\{N, N'\}$.

Soit B la boule unité pour la norme $\max\{N, N'\}$:

$B = \{x \in \mathbb{R}^n : \max\{N(x), N(x')\} < 1\} = \{x \in \mathbb{R}^n : N(x) < 1 \text{ et } N'(x) < 1\}$
$= \{x \in \mathbb{R}^n : N(x) < 1\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : N'(x) < 1\} = B_N \cap B_{N'}$

Ou encore :

Soit $x \in B_N \cap B_{N'}$: alors $N(x) < 1$ et $N'(x) < 1$ et donc $\max\{N(x), N'(x)\} < 1$; ce qui montre que $B_N \cap B_{N'} \subset B$

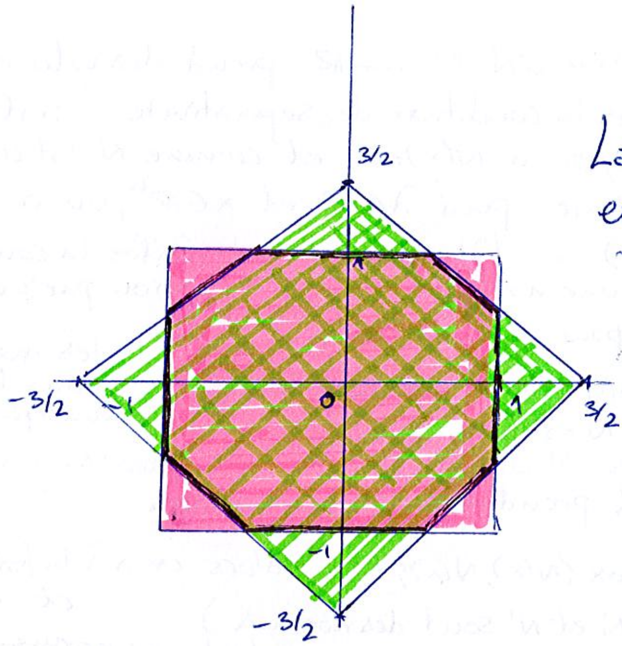
inclusion inverse : soit $x \in B$:
$\max\{N(x), N'(x)\} < 1$ et donc $N(x) < 1$: $x \in B_N$
et $N'(x) < 1$: $x \in B_{N'}$

ceci montre que $B \subset B_N \cap B_{N'}$.

4. Dans $\mathbb{R}^2$, dessiner (au dos de la feuille) la boule unité pour la norme $\max\{N_\infty, \frac{2}{3}N_1\}$.

$B_{N_\infty} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} < 1\}$

$B_{\frac{2}{3}N_1} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{2}{3}(|x|+|y|) < 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 , |x|+|y| < \frac{3}{2}\}$



La boule unité cherchée est l'intersection des parties rose et verte : c'est l'intérieur de l'octogone limité par le trait noir.