Université d'Aix-Marseille, Master 1 Mathématiques et Applications Année 2019-2020

Analyse fonctionnelle et analyse de Fourier

Contrôle 2 - Semaine du 12 novembre 2019

Merci d'accorder un grand soin à la rédaction et de justifier les réponses !

Exercice 1. Soit $E = C([0,1])$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in E$, on note

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt.$$

On note $u : E \to \mathbb{R}$ l'application linéaire définie par $u(f) = f(1/2)$ pour tout $f \in E$.

1. Vérifier rapidement que $\|\ \|_1$ est bien une norme sur E.
2. En munissant E de la norme $\|\ \|_1$, l'application u est-elle continue, et si oui quelle est sa norme $|||u|||$?

Exercice 2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $C^1([0,1])$ (espace vectoriel des fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1). On suppose qu'il existe une constante $M > 0$ telle que $\|f_n\|_\infty + \|f_n'\|_\infty \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer qu'il existe $f \in C([0,1])$ et une suite extraite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers f dans $C([0,1])$ (pour la norme infinie).
2. La fonction f est-elle toujours dans $C^1([0,1])$?

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue 2π-périodique. Montrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}\backslash(\pi\mathbb{Q})$, on a :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k\alpha) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt.$$

Indication : on pourra d'abord montrer le résultat souhaité pour des fonctions f du type $f : t \mapsto e^{imt}$ avec $m \in \mathbb{Z}$, et utiliser ensuite une application donnée en cours du théorème de Stone-Weierstraß, version complexe.

Exercice 4. Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$.

1. Question de cours : énoncer l'inégalité de Hölder dans les espaces $\mathcal{L}^p(\Omega)$.
2. Application : montrer que, pour toute fonction $f \in C([0,1])$,

$$\left(\int_0^1 |f(t)|^2\,dt\right)^3 \leq \left(\int_0^1 |f(t)|^3\,dt\right)^2.$$