

Exercice 1 : $N : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto \max(|x+y|, |x-y|)$

a) Il est évident que N est positive.

(i) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $N(x, y) = 0$.

On a $|x+y| = 0$ et $|x-y| = 0$ (car $\max(|x+y|, |x-y|) = 0$)

ou encore $x = -y$ et $x = y$

donc $2x = 0$ et $x = y$

et $x = 0$ et $y = 0$.

(ii) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$N(\lambda(x, y)) = N(\lambda x, \lambda y) = \max(|\lambda x + \lambda y|, |\lambda x - \lambda y|)$

et comme $|\lambda x + \lambda y| = |\lambda| |x + y|$ et $|\lambda x - \lambda y| = |\lambda| |x - y|$

on a $\max(|\lambda x + \lambda y|, |\lambda x - \lambda y|) = |\lambda| \max(|x + y|, |x - y|)$
 $= |\lambda| N(x, y)$

(iii) Soit $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

$N((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = N(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = \max(|x_1 + x_2 + y_1 + y_2|, |x_1 + x_2 - y_1 - y_2|)$

or $|x_1 + x_2 + y_1 + y_2| \leq |x_1 + y_1| + |x_2 + y_2|$

et $|x_1 - y_1 + x_2 - y_2| \leq |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ (inégalité triangulaire sur $(\mathbb{R}, |\cdot|)$)

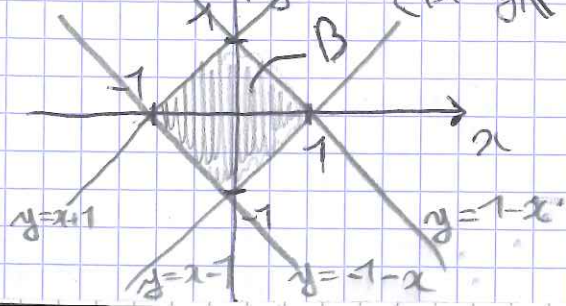
Donc $N((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) \leq N(x_1, y_1) + N(x_2, y_2)$

(i) est la positivité, (ii) est l'homogénéité et (iii) l'inégalité triangulaire
 donc N est une norme.

b) La boule unité pour N est $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / N(x, y) \leq 1\}$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$N(x, y) \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} |x+y| \leq 1 \\ |x-y| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x+y \leq 1 \\ -1 \leq x-y \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1-x \leq y \leq 1-x \\ x-1 \leq y \leq 1+x \end{cases}$



B est le carré colorié.

c) d) Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} N(x, y) &= \max(|x+y|, |x-y|) \\ &\leq \max(|x|+|y|, |x|+|-y|) \\ &\leq |x| + |y| \\ &\leq 2 N_\infty(x, y) \end{aligned}$$

On a aussi $|x| \leq |x+y|$ ou $|x| \leq |x-y|$
(si x et y sont de même signe) (si x et y sont de signes opposés)

$$\begin{aligned} \text{donc } |x| &\leq \max(|x+y|, |x-y|) \\ \text{de même } |y| &\leq \max(|x+y|, |x-y|) \\ \text{et donc } N_\infty(x, y) &\leq N(x, y) \end{aligned}$$

$$\text{On obtient : } N_\infty(x, y) \leq N(x, y) \leq 2 N_\infty(x, y).$$

Exercice 2

a) i) Soit $\beta_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y, z) \mapsto |y| - |\cos x| - 1$

et $\beta_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$

$$\text{On a que } A = \beta_1^{-1}(-\infty, 0] \cap \beta_2^{-1}(-\infty, 2]$$

(ii) Comme β_1 et β_2 sont continues (composées de fonctions continues) donc $\beta_1^{-1}(-\infty, 0]$ et $\beta_2^{-1}(-\infty, 2]$ sont ouverts comme images réciproques d'ouverts par des applications continues. A est ouvert comme l'intersection de deux ouverts.

b) i) $\bar{A} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / |y| \leq |\cos x| + 1 \text{ et } x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}$

ii) $\bar{A}$ est fermé et contient A . Il suffit de montrer que chaque élément de $\bar{A}$ s'écrit comme limite d'une suite d'éléments de A . Soit $(x_0, y_0, z_0) \in \bar{A}$. Si $(x_0, y_0, z_0) \in A$ c'est évident. Sinon, construisons une telle suite.

On a $(x_0, y_0, z_0) \in \bar{A} \setminus A$, donc

(1) : $|y_0| = |\cos x_0| + 1$ ou (2) $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \leq 2$.

Si on a (1) : en particulier $|y_0| > 0$, on pose pour $n \geq 1$:

$$(x_n, y_n, z_n) = (x_0, y_0 \times (1 - \frac{1}{n}), z_0)$$

On a bien $(x_n, y_n, z_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (x_0, y_0, z_0)$

et on a aussi $|y_n| = |y_0| \times |1 - \frac{1}{n}| < |\cos(x_0)| + 1$ car $|1 - \frac{1}{n}| < 1$
et $|y_0| = |\cos x_0| + 1$

$$\text{et } x_n^2 + y_n^2 + z_n^2 = x_0^2 + y_0^2 \times (1 - \frac{1}{n})^2 + z_0^2 < 2 \text{ car } (1 - \frac{1}{n})^2 < 1.$$

donc $(x_n, y_n, z_n) \in A$ et on a bien écrit (x_0, y_0, z_0) comme suite d'éléments de A .

Si on a (2) : Si $|y_0| > 0$ tout se passe comme ci-dessus, sinon c'est que $y_0 = 0$ et soit $|x_0| > 0$, soit $|z_0| > 0$.

Si $|x_0| > 0$ on pose $(x_n, y_n, z_n) = (x_0(1 - \frac{1}{n}), y_0, z_0)$

si $|z_0| > 0$ on pose $(x_n, y_n, z_n) = (x_0, y_0, z_0(1 - \frac{1}{n}))$.

À chaque fois, on a trouvé une suite de A qui tend vers (x_0, y_0, z_0) .
Donc $\bar{A}$ est bien comme annoncé.

Exercice 3

a) (i) On a $(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (0, 0)$ par les théorèmes de comparaison.
En fait $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (0, 0)$ pour n importe quelle norme.

b) f est continue sur $\mathbb{R}^2$ comme composée de fonctions continues.
Par caractérisation séquentielle de la continuité, on a que $f(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(0, 0) = 0$.

→ $|x_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $|y_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ par les théorèmes de comparaison.

Donc $N_0(x_n, y_n) = \max(|x_n|, |y_n|) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Comme N est équivalente à N_0 , on a $N(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.