TD 0 – Quelques (r)appels

Norme. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ($|\cdot|$ désigne la valeur absolue si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et le module si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) On dit qu'une application $N : E \to [0, +\infty[$ est une norme sur E si elle vérifie les trois points suivants :

(i) multiplication par un scalaire : pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ pour tout $x \in E$;

(ii) inégalité triangulaire : pour tout $x, y \in E$, $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$;

(iii) séparation : si $x \in E$ vérifie $N(x) = 0$, alors $x = 0$ (et inversement).

Ensemble convexe. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On dit qu'un ensemble $B \subset E$ est convexe si pour tout $x, y \in B$ et tout $t \in [0,1]$, on a $tx + (1-t)y \in B$.

Exercice 1 (Norme 1 et norme infinie sur $\mathbb{R}^n$)**.** Soit $n \geq 1$. Sur $\mathbb{R}^n$, on définit $N_1(x) = \sum_{k=1}^n |x_k|$ et $N_\infty(x) = \max\{|x_k|, k = 1, ..., n\}$ pour tout $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.

1. Montrer que N_1 et N_∞ sont des normes sur $\mathbb{R}^n$.
2. Lorsque $n = 2$, dessiner les ensembles $B_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : N_1(x) \leq 1\}$ et $B_\infty = \{x \in \mathbb{R}^2 : N_\infty(x) \leq 1\}$. Que se passe-t-il si les inégalités dans les ensembles B_1 et B_∞ sont strictes ?
3. Montrer que, pour $n \geq 1$, les ensembles $B_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : N_1(x) \leq 1\}$ et $B_\infty = \{x \in \mathbb{R}^n : N_\infty(x) \leq 1\}$ sont convexes. Que se passe-t-il si les inégalités dans les ensembles B_1 et B_∞ sont strictes ?

Exercice 2 (Normes p sur $\mathbb{R}^n$)**.** On considère $p, q > 1$ vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. Soit a et b deux réels positifs. Montrer que
$$ab \leq \frac{1}{p}\, a^p + \frac{1}{q}\, b^q.$$
Indication : On pourra étudier la fonction $f : a \mapsto \frac{1}{p}\, a^p + \frac{1}{q}\, b^q - ab$ sur $[0, \infty[$ pour un $b \geq 0$ fixé.

2. (a) Pour $\lambda > 0$ et $x, y \in \mathbb{R}^n$, montrer (en appliquant l'inégalité précédente) que
$$\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq \frac{\lambda^p}{p} \sum_{k=1}^n |x_k|^p + \frac{1}{q\lambda^q} \sum_{k=1}^n |y_k|^q.$$
(b) En optimisant l'inégalité précédente par rapport à $\lambda > 0$, montrer l'inégalité de Hölder :
$$\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq \Big(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{k=1}^n |y_k|^q\Big)^{\frac{1}{q}}.$$
(c) En déduire l'inégalité de Minkowski :
$$\Big(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{k=1}^n |y_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}}.$$
Indication : estimer d'abord $\sum_{k=1}^n |x_k||x_k + y_k|^{p-1}$ en utilisant l'inégalité de Hölder avec $p > 1$ et $q = \frac{p}{p-1}$.

3. En déduire que pour tout $n \geq 1$ et pour tout $p > 1$, l'application $N_p : \mathbb{R}^n \to [0, \infty[$, définie par $N_p(x) = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ lorsque $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

4. Pour $n = 2$, dans $\mathbb{R}^2$, dessiner sur un même dessin les ensembles B_1, B_∞ de l'exercice précédent et $B_2 = \{x \in \mathbb{R}^2; N_2(x) \leq 1\}$.

5. Montrer que pour tout $p \in [1, \infty]$, les ensembles $B_p = \{x \in \mathbb{R}^n; N_p(x) \leq 1\}$ sont convexes.

Exercice 3 (Comparaison de normes)**.** On reprend les notations de l'exercice précédent : pour $n \geq 1$ et $p \in [1, \infty]$, N_p désigne la norme p sur $\mathbb{R}^n$.

1. Pour $p \in [1, \infty[$, montrer que $N_\infty(x) \leq N_p(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

2. Pour $p \in [1, \infty[$, montrer qu'il existe une constante $C_p > 0$ telle que $N_p(x) \leq C_p N_\infty(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Calculer la meilleure constante C_p (la plus petite constante vérifiant l'inégalité pour tout $x \in \mathbb{R}^n$).

3. En déduire que pour tout $p, q \in [1, \infty]$, il existe des constantes $\alpha, \beta > 0$ telles que

$$\alpha N_p(x) \leq N_q(x) \leq \beta N_p(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n.$$

Exercice 4 (Espace de matrices)**.** Soit $n \geq 1$. On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) l'ensemble des matrices carrées $n \times n$ sur $\mathbb{K}$. Soit N une norme sur $\mathbb{K}^n$

1. Montrer que

$$||| \cdot ||| : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow [0, \infty[, \quad A \longmapsto \sup_{N(x) \leq 1} N(Ax)$$

   est une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

2. Montrer que $|||A||| = \sup\limits_{N(x)=1} N(Ax)$ pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{K}^n$, $N(Ax) \leq |||A||| N(x)$. On dit que $||| \cdot |||$ est la norme matricielle subordonnée à N.

4. Montrer que $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \mapsto \max\limits_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}|$ est une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Est-elle subordonnée à une norme de $\mathbb{K}^n$?