TD 1 – Topologie des espaces métriques

Exercice 1 (Boules ouvertes et fermées)**.** Montrer que dans un espace métrique, les boules ouvertes sont des ouverts, les boules fermées sont des fermés, les sphères sont fermées.

Montrer que dans un espace vectoriel normé, l'intérieur d'une boule fermée est la boule ouverte de même centre et même rayon. Que se passe-t-il dans un espace métrique quelconque ?

Exercice 2 (Précompacité)**.** Montrer que dans un espace métrique, un ensemble est compact si, et seulement si, cet ensemble est précompact et complet.

Exercice 3 (Suites, compacts, valeurs d'adhérence)**.**

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'un espace métrique (E,d) qui converge vers un point $x \in E$. Montrer que l'ensemble $\{x_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ est un compact de E.
2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'un espace métrique (E,d). On note $A_n = \{a_k, k \geq n\}$, pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A}_n$ est l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4 (Suites de Cauchy)**.** Soit (E,d) un espace métrique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de E.

1. Montrer que pour toute suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs, on peut extraire une suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que
$$d(x_{\varphi(n)}, x_{\varphi(n+1)}) \leq \varepsilon_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$
2. Montrer que s'il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente, alors la suite complète $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Exercice 5 (Distance à des ensembles)**.** Soit (E,d) un espace métrique. Pour A une partie de E, on définit la distance à A par
$$\mathrm{dist}\,(x,A) = \inf\{d(x,y), y \in A\}, \quad x \in E.$$

1. Montrer que $\mathrm{dist}\,(x,A) = \mathrm{dist}\,(x,\overline{A})$ pour tout $x \in E$.
2. Soit F un fermé et K un compact. On suppose $F \cap K = \emptyset$. Montrer que $\mathrm{dist}\,(K,F)$ définie comme $\inf\{\mathrm{dist}\,(x,F), x \in K\}$ est non nulle.

Exercice 6 (Séparation d'ensembles)**.** Soit U un ouvert d'un espace métrique (E,d). Soit K un compact inclus dans U. Montrer qu'il existe un ouvert V tel que $K \subset V \subset \overline{V} \subset U$.

Exercice 7 (Intersection de compacts)**.** Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille décroissante de compacts d'un espace métrique (E,d) et Ω un ouvert de E. On suppose que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n \subset \Omega$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $K_n \subset \Omega$ pour tout $n \geq N$.

Exercice 8 (Formes linéaires)**.** Soit $L : E \longmapsto \mathbb{R}$ une forme linéaire non nulle sur l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$.

1. Montrer que L est continue si, et seulement si, le noyau de L est fermé dans E.
2. Montrer que L n'est pas continue si, et seulement si, le noyau de L est dense dans E.

Exercice 9 (Exemple de forme linéaire sur ℓ^1)**.** Soit $\Theta \in \mathscr{L}(\ell^1, \mathbb{R})$ définie par

$$\Theta\big((x_n)_{n\geq 1}\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \big(1 - \tfrac{1}{n}\big) x_n.$$

Montrer que $\big\|\Theta\big\|_{\mathscr{L}(\ell^1,\mathbb{R})} \leq 1$, puis que cette norme est égale à 1, mais n'est pas atteinte.

Exercice 10 (Fonctions continues)**.**

1. Sur $\mathscr{C}([0,1])$ l'ensemble des fonctions réelles continues sur l'intervalle $[0,1]$, on définit $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f|$, pour $f \in \mathscr{C}([0,1])$ et $\|f\|_\infty = \sup\limits_{[0,1]} |f|$.
   (a) Montrer que $\big(\mathscr{C}([0,1]), \|\cdot\|_1\big)$ est un espace vectoriel normé.
   (b) La forme linéaire $f \mapsto f\big(\frac{1}{2}\big)$ est-elle continue sur $\big(\mathscr{C}([0,1]), \|\cdot\|_1\big)$? Et sur $\big(\mathscr{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty\big)$
2. On considère l'application linéaire $f \mapsto f'$ définie sur $\mathscr{C}^1([0,1])$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ à valeurs dans $\mathscr{C}([0,1])$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Cette application linéaire est-elle continue ?

Exercice 11 (Espaces de suites)**.**

1. On note c_{00} l'ensemble des suites réelles dont les termes sont nuls à partir d'un certain rang. On définit $\varphi : c_{00} \to \mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n^2$ pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que φ n'est pas continue en 0.
2. Sur ℓ^p $(1 \leq p \leq \infty)$, on définit le “shift à gauche” $G\big((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) = (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et le “shift à droite” $D\big((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) = (x_{n-1})_{n\geq 1}$. Montrer que G et D sont continues sur ℓ^p.
3. On définit Λ sur ℓ^2 par $\Lambda\big((x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$.
   (a) Montrer que Λ est une application linéaire continue sur ℓ^2. Quelle est sa norme ?
   (b) Montrer que Λ est inversible si, et seulement si, $\inf\big\{|\lambda_k|, k \in \mathbb{N}\big\} > 0$.
   (c) Montrer que si $\lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, alors $\{\lambda_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \sigma_p(\Lambda) \subset \{0\} \cup \{\lambda_n, n \in \mathbb{N}\}$.