TD 1 – Topologie en dimension finie

Rappels de cours

Ouverts. Un ensemble X dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est ouvert si pour tout $x \in X$, il existe $r > 0$ (r dépend de x) tel que $B(x,r) = \{y \in E; \|x-y\| < r\}$ est inclus dans X.

Fermés. Une partie F dans $(E, \|\cdot\|)$ est fermée si son complémentaire $F^c := E \setminus F$ est ouvert.

Exercice 1 (Boules ouvertes et fermées de $\mathbb{R}^d$)**.** Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^d$. Pour $a \in \mathbb{R}^d$ et $r > 0$, on note

$$B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^d; \|x-a\| < r\}$$

et

$$B_f(a,r) = \{y \in \mathbb{R}^d; \|x-a\| \leq r\}.$$

1. Montrer que $B(a,r)$ et $B_f(a,r)$ sont des ensembles convexes de $\mathbb{R}^d$.
2. Montrer que $B(a,r)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ puis que $B_f(a,r)$ est un fermé de $\mathbb{R}^d$.
3. L'ensemble $S(a,r) := \{y \in \mathbb{R}^d; \|x-a\| = r\}$ est-il ouvert ? fermé ?
4. Montrer que l'intérieur de $B_f(a,r)$ est $B(a,r)$ et que l'adhérence de $B(a,r)$ est $B_f(a,r)$.
5. Quel est l'intérieur de $S(a,r)$?

Exercice 2 (Parties de $\mathbb{R}^2$)**.** On considère les ensembles

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; |x+y| \leq 1, |x-y| > 1, x \geq 0\}$$

et

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; |x| + y^2 \leq 2 \text{ et } x^2+y^2 < 4\}.$$

On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne (la norme N_2 du TD 0).

1. Dessiner les ensembles A et B.
2. Les ensembles A et B sont-ils ouverts ? fermés ?
3. Déterminer $\overline{A}$ et $\mathring{A}$, puis $\overline{B}$ et $\mathring{B}$.
4. Les ensembles $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont-ils compacts ?

Exercice 3 (Union infinie de fermés et intersection infinie d'ouverts)**.** On se place dans $\mathbb{R}$ muni de la valeur absolue.

1. Pour $n \geq 1$, on note $I_n = \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$.
   (a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, I_n est un ouvert.
   (b) Soit $N \geq 1$. Montrer que $\displaystyle\bigcap_{1 \leq n \leq N} I_n$ est ouvert.
   (c) Déterminer $I := \displaystyle\bigcap_{n \geq 1} I_n$. I est-il ouvert ?

2. Pour $n \geq 2$, on note $J_n = \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$.

   (a) Montrer que pour tout $n \geq 2$, J_n est un fermé.

   (b) Soit $N \geq 2$. Montrer que $\displaystyle\bigcup_{2 \leq n \leq N} J_n$ est fermé.

   (c) Déterminer $J := \displaystyle\bigcup_{n \geq 2} J_n$. J est-il fermé ?

Exercice 4. On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ (norme N_∞ du TD 0). Pour $n \geq 1$, on note $B_n = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 < \frac{1}{n}\right\}$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, B_n est un ouvert de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$.

2. Déterminer $\displaystyle\bigcap_{n \geq 1} B_n$.

3. (a) Décrire $\overline{B}_1$.

   (b) Soit $F_n = \overline{B}_1 \setminus B_n$ pour $n \geq 1$: montrer que F_n est fermé dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$.

   (c) Déterminer $\displaystyle\bigcup_{n \geq 1} F_n$.

Exercice 5 (Suite de $\mathbb{R}^2$)**.** Soit $\theta \in [0, 2\pi[$. Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de points de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées $(\cos(n\theta), \sin(n\theta))$, $n \in \mathbb{N}$.
Montrer qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(P_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}^2$ (pour quelle norme ?).