TD 2 – Espaces de Banach

Exercice 1 (Série de Von Neumann)**.** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach. On note $\mathscr{L}(E)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans E, muni de la norme $|||\cdot|||$ subordonnée à $\|\cdot\|$. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ telle que $|||u||| < 1$.

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u^n$ est convergente dans $\mathscr{L}(E)$ (u^n représente la composée n fois de l'application linéaire u par elle-même).
2. Montrer que $\mathrm{Id}_E - u$ est inversible dans $\mathscr{L}(E)$.
3. Montrer que $|||(\mathrm{Id}_E - u)^{-1}||| \leq \frac{1}{1-|||u|||}$.

Exercice 2 (Applications linéaires)**.** Soit E un espace vectoriel normé et F un espace de Banach. On note $\mathscr{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F.

1. Rappeler pourquoi $\mathscr{L}(E, F)$ muni de la "norme triple" est complet.
2. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de $\mathscr{L}(E, F)$. Soit X un sous-ensemble dense de E. On suppose que pour tout $x \in X$, la suite $\big(T_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Montrer que $\big(T_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente pour tout $x \in E$.
3. Que se passe-t-il si F n'est pas complet ? Donner un exemple.
4. Soit E un espace de Banach séparable et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $E' = \mathscr{L}(E, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe une constante $M > 0$ telle que $|||T_n||| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe une suite extraite $(T_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $T \in E'$ vérifiant
$$T_{\varphi(n)}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} T(x), \quad \forall\, x \in E.$$
On appelle T la limite faible de la suite $(T_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 3 (Distance à un hyperplan)**.** Soit H un hyperplan dans un espace de Banach $(E, \|\cdot\|)$, c'est-à-dire que H est un sous-espace vectoriel de E tel que E/H est de dimension 1.

1. Montrer qu'il existe $\ell \in E' =: \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$ telle que $H = \operatorname{Ker} \ell$.
2. Soit $x \in E$. Montrer que $\operatorname{dist}(x, H) = \dfrac{|\ell(x)|}{|||\ell|||}$. On rappelle que $\operatorname{dist}(x, H) = \inf\limits_{y\in H} \|y - x\|$.

Exercice 4 (Théorème de l'application ouverte)**.** On note A l'application définie sur c_{00} des suites nulles à partir d'un certain rang (muni de la norme infinie) par
$$A\big((x_n)_{n\geq 1}\big) = \left(\frac{x_n}{n}\right)_{n\geq 1}, \quad (x_n)_{n\geq 1} \in c_{00}.$$

1. Montrer que A est linéaire continue de $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ dans lui-même.
2. Montrer que A admet un inverse, puis montrer que cet inverse n'est pas continu de $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ dans lui-même.
3. Que peut-on en déduire ?

Exercice 5 (Formes linéaires continues)**.** Soit E un espace vectoriel normé séparable et $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite dense de E. On note E' l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur E, et on le munit de la norme subordonnée à celle de E. On note B la boule unité de E', c'est-à-dire

$$B = \big\{T \in E'; |T(x)| \leq \|x\| \, \forall\, x \in E\big\}.$$

1. Montrer que
$$B \times B \ni (T,S) \mapsto d(T,S) := \sum_{p\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^p} \min\{|T(x_p) - S(x_p)|, 1\}$$
est une distance sur B.

2. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de B et $T \in B$. Montrer l'équivalence
$$\Big(d(T_n,T) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\Big) \iff \Big(\forall\, x \in E,\ T_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} T(x)\Big).$$

Exercice 6 (Théorème d'Arzelà-Ascoli)**.** Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathscr{C}^1([0,1])$.

1. On suppose que $f_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et qu'il existe une constante $M > 0$ telle que $\|f_n'\|_\infty \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe une suite extraite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $\mathscr{C}([0,1])$. La limite est-elle dans $\mathscr{C}^1([0,1])$?

2. On suppose maintenant qu'il existe une constante $M > 0$ telle que $\|f_n\|_\infty \leq M$ et $\|f_n'\|_\infty \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe une suite extraite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $\mathscr{C}([0,1])$. La limite est-elle dans $\mathscr{C}^1([0,1])$?

Exercice 7 (Espaces de suites)**.** Pour $1 \leq p < \infty$, on note ℓ^p l'ensemble des suites réelles p-sommables muni de la norme $\|\cdot\|_p$.

1. Rappeler pourquoi la boule unité fermée de ℓ^p n'est pas compacte.

2. Pour quel(s) $p \geq 1$ l'ensemble $A := \big\{x = (x_n)_{n\geq 1}; |x_n| \leq \frac{1}{\sqrt{n}},\ \forall\, n \geq 1\big\}$ est-il compact dans ℓ^p?