TD 2 – Limites et continuité

Exercice 1 (Image directe et image réciproque)**.** Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = xyz$.

1. Déterminer l'image réciproque du singleton $\{0\}$.
2. Déterminer l'image (directe) de la boule de $\mathbb{R}^3$ pour la norme infinie.

Exercice 2 (Limites)**.** Déterminer, si elles existent, les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}$;
2. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$;
3. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(xy)^\alpha}{x^2+y^2}$ (selon la valeur de $\alpha > 0$) ;
4. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\pi,1)} \frac{\sin x}{\sqrt{(x-\pi)^2+(y-1)^2}}$;
5. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(1-e^{y^2})\ln x}{(x-1)^2+y^4}$.

Exercice 3 (Continuité 1)**.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer l'ensemble de niveau α de f.
2. Soit $t \in \mathbb{R}$. Déterminer, si cette limite existe, $\lim_{x\to 0} f(x, tx)$.
3. Que peut-on en déduire du comportement de f proche du point $(0, 0)$?
4. Mêmes questions avec $g(x, y) = \frac{xy}{x^4+y^4}$.

Exercice 4 (Continuité 2)**.** Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = \frac{\max\{|x|,|y|,|z|\}}{1+|x|+|y|+|z|}$.

1. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}^3$ muni de la norme euclidienne $N_2 : (x, y, z) \mapsto \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. On suppose que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers X dans $(\mathbb{R}^3, N_2)$. Montrer que $(f(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(X)$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.
2. Que peut-on en déduire de la continuité de f sur $\mathbb{R}^3$?

Exercice 5 (Images réciproques)**.** Déterminer si les ensembles suivants sont ouverts ou fermés, ou ni l'un ni l'autre :

1. $A = \left\{x \in \mathbb{R}^n; |x_1| + |x_n| < 1 \text{ et } \sin(x_1x_2...x_n) > \frac{1}{2}\right\}$;
2. $B = \left\{x \in \mathbb{R}^n; |x_1x_2...x_n| \geq 1 \text{ et } \cos(x_1 + x_2) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$;
3. $C = \left\{x \in \mathbb{R}^n; -2 < x_1 + x_2 + ... + x_n \leq 1\right\}$.

Exercice 6 (Continuité et Dérivabilité)**.** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 0$ et $f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{(xy)^\alpha}$ sinon.

1. À quelle condition sur α la fonction f est-elle continue en $(0,0)$?
2. À quelle condition sur α les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont-elles continues en $(0,0)$?

Exercice 7 (Continuité et fonction bornée)**.** Soit $\| \cdot \|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On pourra, dans un premier temps, traiter la dimension $n = 1$.

1. On suppose que $|f|$ admet une limite finie à l'infini ($\|x\| \to \infty$). Montrer qu'alors la fonction f est bornée sur $\mathbb{R}^n$.
2. Soit P un polynôme réel à n variables. Montrer que si P est borné sur $\mathbb{R}^n$, alors P est un polynôme constant.