TD 3 – Fonctions continues

Exercice 1 (Une application du théorème de Baire)**.** Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de (X,d) espace métrique complet dans (Y,δ) espace métrique. On suppose que pour tout $x\in X$, il existe $f(x)\in Y$ tel que $\lim_{n\to\infty}\delta(f_n(x),f(x))=0$ (la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f). Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe une partie dense de X sur laquelle f est continue.

1. Pour $n\in\mathbb{N}$ et $k\geq 1$, on pose

$$F_{k,n} := \bigcap_{p,q\geq n}\big\{x\in X; \delta(f_p(x),f_q(x))\leq \frac{1}{k}\big\}.$$

   (a) Montrer que pour tout $p,q\in\mathbb{N}$ et tout $k\geq 1$, l'ensemble $\big\{x\in X;\delta(f_p(x),f_q(x))\leq\frac{1}{k}\big\}$ est fermé dans X.

   (b) En déduire que $F_{k,n}$ est fermé pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $k\geq 1$.

   (c) Soit $k\geq 1$ fixé. Montrer que $X=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}F_{k,n}$.

2. Pour $k\geq 1$, on note

$$\Omega_k=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\overset{\circ}{F}_{k,n}.$$

   (a) Montrer que pour tout $k\geq 1$, Ω_k est un ouvert dense de X.
   Indication : c'est un corollaire du théorème de Baire (union d'intrieurs de fermés dont la réunion est l'espace de Baire tout entier).

   (b) Soit $k\geq 1$ et $x\in\Omega_k$. Montrer qu'il existe $r>0$ (r dépend de k et de x) tel que pour tout $y\in X$ avec $d(x,y)\leq r$, on a $\delta(f(x),f(y))\leq\frac{3}{k}$.

   (c) On note $\Omega=\bigcap_{k\geq 1}\Omega_k$.

      i. Montrer que Ω est dense dans X.

      ii. Montrer que f est continue en tout $x\in\Omega$.

3. Conclusion ?

4. Application

   (a) Montrer que la dérivée d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ est continue sur un ensemble dense de $\mathbb{R}$.

   (b) Soit $\{r_1,r_2,...,r_n,...\}$ une énumération des rationnels de $[0,1]$. Pour $x\in[0,1]$, on définit

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\varphi(x-r_n),\quad \text{où } \varphi(t)=t^2\sin(1/t).$$

   Montrer que f est dérivable sur $[0,1]$, puis que f' est continue sur $[0,1]\setminus\mathbb{Q}$, discontinue sur $[0,1]\cap\mathbb{Q}$.

Exercice 2 (Famille équicontinue)**.** 1. Soit X un espace métrique et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathscr{C}(X)$. Montrer que si $\{f_n,n\in\mathbb{N}\}$ est équicontinue en un point $x\in X$, alors pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X qui converge vers x, la suite $(f_n(x)-f_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

2. Soit $f_n(x) = \sin nx$, $x \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$. Montrer que $\{f_n, n \geq 1\}$ n'est équicontinue en aucun point $x \in \mathbb{R}$. Indication : considérer les points $x_n = x + \frac{\pi}{2n}$, $n \geq 1$.

Exercice 3 (Théorème de Stone-Weierstrass). 1. Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit $f \in \mathscr{C}([a,b])$ vérifiant $\int_a^b t^n f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Que peut-on dire de f ?

2. Soit $f \in \mathscr{C}_b(\mathbb{R})$. Montrer que f n'est pas limite uniforme de polynômes de $\mathbb{R}[X]$.

3. Soit K_1 et K_2 deux espaces métriques compacts. Soit $\mathscr{A}$ l'ensemble des combinaisons linéaires finies f de la forme

$$f(x,y) = \sum_{i \in I} \lambda_i u_i(x) v_i(y), \quad x \in K_1, y \in K_2, \quad u_i \in \mathscr{C}(K_1), v_i \in \mathscr{C}(K_2), \lambda_i \in \mathbb{R}, I \text{ fini.}$$

Montrer que $\mathscr{A}$ est dense dans $\mathscr{C}(K_1 \times K_2)$.

Exercice 4 (Fonctions hölderiennes). Soit $\alpha \in]0,1]$. On note $\mathscr{C}^\alpha([0,1]$ l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ telles que la quantité

$$|f|_\alpha := \sup_{x,y \in [0,1], x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha}$$

est finie (on appelle ces fonctions les fonctions hölderiennes de rapport α). On note $\|\cdot\|$ la norme uniforme.

1. Que se passe-t-il lorsque $\alpha > 1$?

2. Montrer que $(\mathscr{C}^\alpha([0,1]), \|\cdot\| + |\cdot|_\alpha)$ est un espace de Banach. On note $\|\cdot\|_\alpha$ la norme $\|\cdot\| + |\cdot|_\alpha$.

3. Montrer que la boule unité fermée de $(\mathscr{C}^\alpha([0,1]), \|\cdot\| + |\cdot|_\alpha)$ est compacte dans $\mathscr{C}([0,1])$.

4. Soit maintenant $0 < \alpha < \beta < 1$.

   (a) Soit $f \in \mathscr{C}^\beta([0,1])$. Montrer que pour tout $\delta > 0$, on a

   $$|f|_\alpha \leq \max\bigl\{|f|_\beta \delta^{\beta-\alpha}, 2\|f\|\delta^{-\alpha}\bigr\}.$$

   En déduire que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de $\mathscr{C}^\beta([0,1])$ qui converge uniformément (relativement à la norme $\|\cdot\|$) vers $f \in \mathscr{C}^\beta([0,1])$, alors $\|f_n - f\|_\alpha \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

   (b) En déduire que la boule unité fermée de $(\mathscr{C}^\beta([0,1]), \|\cdot\|_\beta)$ est compacte dans $\mathscr{C}^\alpha([0,1])$.

Exercice 5 (Théorème d'Ascoli). 1. Soit $k > 0$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions k-lipschitziennes de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$ vérifiant $\|f_n(0)\| \leq 1$.

   (a) Montrer que pour tout $R > 0$, on peut extraire de la suite $(f_{n|_{B_R}})_{n\in\mathbb{N}}$ (restrictions de f_n à la boule $B_R = \{x \in \mathbb{R}^d ; \|x\| \leq R\}$) une suite convergente dans $\mathscr{C}(B_R, \mathbb{R}^d)$.

   (b) Montrer, en utilisant le procédé diagonal de Cantor qu'on peut extraire une suite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge simplement sur $\mathbb{R}^d$. La convergence est-elle uniforme ?

2. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de $\mathscr{C}_b([0,\infty[)$ définie par

$$f_n(t) = \sin\sqrt{t + 4\pi^2 n^2}, \quad t \geq 0.$$

   (a) Montrer qu'il s'agit d'une famille équicontinue qui converge simplement vers la fonction nulle.

   (b) La suite $(f_n)_{n\geq 1}$ est-elle relativement compacte dans $(\mathscr{C}_b([0,\infty[), \|\cdot\|_\infty)$?

3. Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit $k \in \mathscr{C}([a,b] \times [a,b])$. On définit

$$Kf(t) = \int_a^b k(t,s) f(s)\, \mathrm{d}s, \quad t \in [a,b],\ f \in \mathscr{C}([a,b]).$$

Montrer que K est un opérateur compact de $(\mathscr{C}([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$.

Exercice 6 (Parties relativement compactes de ℓ^p)**.**

1. Soit $A = \left\{(x_n)_{n\geq 1}; |x_n| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}, \forall\, n \geq 1\right\}$. Pour quel(s) $p \in [1, \infty]$ la partie A est-elle compacte dans l'espace ℓ^p ?

2. (a) Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. Montrer que A est précompacte si, et seulement si, A est bornée et si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe F_ε un sous-espace vectoriel de E de dimension finie tel que pour tout $x \in A$, $d(x, F_\varepsilon) \leq \varepsilon$.

   (b) Soit $1 \leq p < \infty$. Soit $A \subset \ell^p(\mathbb{N})$.

      i. On suppose que A est bornée et vérifie : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\left(\sum_{n\geq N} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon$ pour tout $x \in A$. Montrer que A est relativement compacte dans $\ell^p(\mathbb{N})$.

      ii. Montrer que l'implication précédente est une équivalence.