TD 3 – Dérivées partielles et différentielles

Exercice 1. Justifier l'existence des dérivées partielles des fonctions suivantes, et les calculer.

1. $f(x, y) = e^x \cos y$.
2. $f(x, y) = (x^2 + y^2) \cos(xy)$.
3. $f(x, y) = \sqrt{1 + x^2 y^2}$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1.

1. On définit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $g(t) = f(2 + 2t, t^2)$. Démontrer que g est C^1 et calculer $g'(t)$ en fonction des dérivées partielles de f.
2. On définit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $h(u, v) = f(uv, u^2 + v^2)$. Démontrer que h est C^1 et exprimer les dérivées partielles $\frac{\partial h}{\partial u}$ et $\frac{\partial h}{\partial v}$ en fonction des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Exercice 3. On définit $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$ par

$$f(x, y) = \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{3/4}}.$$

Justifier que l'on peut prolonger f en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$. Étudier l'existence de dérivées partielles en $(0, 0)$ pour ce prolongement.

Exercice 4. Pour $(x, y) \neq (0, 0)$, on pose

$$f(x, y) = xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

1. f admet-elle un prolongement continu à $\mathbb{R}^2$?
2. f admet-elle un prolongement C^1 à $\mathbb{R}^2$?
3. f admet-elle un prolongement C^2 à $\mathbb{R}^2$?

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \sin(x^2 - y^2)$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $g(x, y) = (x + y, x - y)$.

1. Justifier que f et g sont différentiables en tout vecteur $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, puis écrire la matrice jacobienne de f et celle de g en (x, y).
2. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, déterminer l'image d'un vecteur $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ par l'application linéaire $d(f \circ g)((x, y))$ en utilisant les deux méthodes suivantes :
   (a) en calculant $f \circ g$;
   (b) en utilisant le produit de deux matrices jacobiennes.