TD 4 – Espaces L^p et ℓ^p

Exercice 1 (Inégalité de Hardy)**.** Soit $1 < p < \infty$; on note p' l'exposant conjugué de p, c'est-à-dire $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Pour f une fonction (ou une classe de fonctions) sur $]0, +\infty[$, on définit $\tilde{f}$ sur $\mathbb{R}$ par

$$\tilde{f}(x) = e^{x/p} f(e^x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pour $f \in L^p(0, \infty)$, on définit

$$Tf(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\, \mathrm{d}t, \quad x > 0.$$

1. Montrer que $f \in L^p(0, \infty)$ si, et seulement si, $\tilde{f} \in L^p(\mathbb{R})$ et que, dans ce cas, $\|f\|_{L^p(0,\infty)} = \|\tilde{f}\|_{L^p(\mathbb{R})}$.
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-x/p'} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que $g \in L^1(\mathbb{R})$ et calculer $\|g\|_{L^1(\mathbb{R})}$.
   (b) Montrer que pour $f \in L^p(0, \infty)$, on a $\widetilde{Tf} = \tilde{f} * g$.
   (c) En déduire que T est un opérateur linéaire continu de $L^p(0, \infty)$ dans lui-même de norme inférieure ou égale à p'.
3. Pour $n \geq 1$, on note f_n la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f_n(t) = (nt)^{-1/p} \mathbb{1}_{[1,e^n]}(t)$, $t > 0$.
   (a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $f_n \in L^p(0, \infty)$ et calculer $\|f_n\|_{L^p(0,\infty)}$.
   (b) Montrer que $\|Tf_n\|_{L^p(0,\infty)} \xrightarrow[n\to\infty]{} p'$.
   (c) Que vaut la norme de l'opérateur $T : L^p(0, \infty) \to L^p(0, \infty)$?

Exercice 2 (Théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov)**.** Le but de cet exercice est de caractériser les parties relativement compactes de $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$.

On rappelle que dans un espace métrique complet (E, d), une partie est relativement compacte si, et seulement si, elle est précompacte.

1. On suppose dans cette question que $A \subset L^p(\mathbb{R})$ est précompacte.
   (a) Montrer que A est bornée.
   (b) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $R_0 > 0$ tel que pour tout $R > R_0$ et pour tout $f \in A$, on a
   $$\left(\int_{|x|>R} |f(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon.$$
   (c) Montrer que pour $a \in \mathbb{R}$, la translation $\tau_a : f \mapsto f(\cdot + a)$ est uniformément continue sur $L^p\mathbb{R})$.
   (d) En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $a \in \mathbb{R}$ avec $|a| < \delta$, on a $\|\tau_a f - f\|_p \leq \varepsilon$ pour tout $f \in A$.
2. On suppose maintenant que A vérifie les trois propriétés 1a, 1b et 1d ; c'est-à-dire que A est une partie bornée de $L^p(\mathbb{R})$, et pour tout $\varepsilon > 0$,
   (i) il existe $R > 0$ tel que
   $$\left(\int_{|x|>R} |f(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon, \quad \forall f \in A;$$

(*ii*) il existe $\delta > 0$ tel que
$$\|\tau_a f - f\|_p \le \varepsilon, \quad \forall\, a \in [-\delta, \delta], \quad \forall\, f \in A.$$

On fixe dès à présent $\varepsilon > 0$ quelconque. On veut montrer qu'on peut recouvrir A par un nombre fini de boules de rayon ε.

(a) Soit $(\phi_n)_{n\ge 1}$ une approximation de l'identité. Montrer qu'il existe $N \ge 1$ tel que
$$\|f - \phi_N * f\|_p \le \varepsilon, \quad \forall\, f \in A.$$

(b) Montrer que
$$B = \left\{(\phi_N * f)_{|[-R,R]}, f \in A\right\}$$
est relativement compacte dans $\mathscr{C}([-R,R])$ (R est défini par (i) et N par la question précédente).
Indication : on pourra penser à utiliser le théorème d'Ascoli.

(c) En déduire que A est précompacte dans $L^p(\mathbb{R})$.

3. Conclusion ?

Exercice 3 (Opérateurs compacts sur ℓ^p)**.** Soit $1 < p < \infty$ et T une application linéaire vérifiant $\sum_{i\ge 1} \|T(e_i)\|_{\ell^p}^{p'} < \infty$ où p' est l'exposant conjugué de p ($\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$) et $e_i \in \ell^p$ est la suite qui vaut 0 partout sauf à la place i où elle vaut 1 : $(e_i)_j = 0$ si $j \neq i$ et $(e_i)_i = 1$.

1. Donner l'expression de (et un sens à) $T(u)$ pour tout $u \in \ell^p$.

2. Soit $n \ge 1$. On note T_n l'application linéaire définie par $T_n(u) = \sum_{i=1}^{n} u_i T(e_i)$ pour $u = (u_i)_{i\ge 1} \in \ell^p$.
Montrer que
$$\|T_n\|_{\mathscr{L}(\ell^p)} \le \left(\sum_i \|T(e_i)\|_{\ell^p}^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

3. Dire pourquoi T_n est un opérateur compact de ℓ^p pour tout $n \ge 1$.

4. L'application linéaire T est-elle continue ? Si oui, quelle est sa norme ? Est-elle compacte ?

Exercice 4 (Produit de convolution dans $\ell^p(\mathbb{Z})$)**.** On dit que deux suites $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $b = (b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont convolables si
$$\forall\, n \in \mathbb{Z}, \ \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_{n-k}||b_k| < \infty.$$
Si c'est le cas, on définit la suite $a * b$ par
$$(a*b)_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{n-k} b_k, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

1. Montrer que si deux suites a et b sont convolables, alors b et a sont convolables, et qu'alors $a*b = b*a$.

2. Soit $1 \le p, q \le \infty$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \ge 1$. On suppose que $a \in \ell^p(\mathbb{Z})$ et $b \in \ell^q(\mathbb{Z})$.
   (a) Montrer que a et b sont convolables.
   (b) Montrer que $a * b \in \ell^r(\mathbb{Z})$, où r vérifie $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$.
   (c) Montrer que $\|a*b\|_{\ell^r} \le \|a\|_{\ell^p}\|b\|_{\ell^q}$.

3. Démontrer que l'espace vectoriel normé $\ell^1(\mathbb{Z})$ muni du produit $*$ est une algèbre de Banach commutative unitaire (c'est-à-dire qu'il existe $e \in \ell^1(\mathbb{Z})$ tel que $a * e = e * a = a$ pour tout $a \in \ell^1(\mathbb{Z})$: déterminer e).