TD 4 – Différentielles

Exercice 1. Justifier que les fonctions suivantes sont différentiables, et calculer leur matrice jacobienne.

1. $f(x, y, z) = \left(\dfrac{1}{2}(x^2 - z^2), \sin x \sin y\right)$.
2. $f(x, y) = \left(xy, \dfrac{1}{2}x^2 + y, \ln(1 + x^2)\right)$.

Exercice 2. Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = M^2$. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et déterminer la différentielle de f en tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 3. Soit $m \in \mathbb{N}$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{array}{ccl} (x, y) & \mapsto & \dfrac{x^m y}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ (0, 0) & \mapsto & 0. \end{array}$$

- Étude de la fonction sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$:
  1. montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$;
  2. calculer le gradient de f pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$;
  3. montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$;
  4. que peut-on conclure sur la différentiabilité de f sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$?
- Étude de la fonction en $(0, 0)$:
  1. pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{N}$ la fonction f est-elle continue en $(0, 0)$?
  2. calculer le gradient de f en $(0, 0)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$;
  3. pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{N}$ la fonction f est-elle différentiable en $(0, 0)$?
  4. pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{N}$ la fonction f est-elle de classe C^1 en $(0, 0)$?

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^2)^2$, on a

$$|f(x) - f(y)| \leq \|x - y\|^2.$$

Démontrer que f est constante.