TD 5 – Transformée de Fourier

Exercice 1 (Opérateur compact)**.** Soit $a \in L^1(0,1)$. On considère l'application V_a définie sur $\mathscr{C}([0,1])$ par

$$V_a(f)(x) = \int_0^x a(t)f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in [0,1], f \in \mathscr{C}([0,1]).$$

1. Montrer que V_a est un opérateur linéaire borné de $\mathscr{C}([0,1])$ muni de la norme infinie dans $\mathscr{C}([0,1])$.
2. Montrer que la norme de V_a est contrôlée par $\|a\|_1$. Montrer que si $a \in \mathscr{C}([0,1])$, alors la norme de V_a vaut $\|a\|_1$.
3. Montrer que V_a est un opérateur compact de $\mathscr{C}([0,1])$, c'est-à-dire que l'image par V_a de la boule unité de $\mathscr{C}([0,1])$ est compacte dans $\mathscr{C}([0,1])$.
4. Soit $p \in]1,\infty[$. Mêmes questions avec $V_a : L^p(0,1) \to \mathscr{C}([0,1])$ pour $a \in L^{p'}(0,1)$, où p' est l'exposant conjugué de p : p' vérifie $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ (on remplacera $\|a\|_1$ par $\|a\|_{p'}$).

Exercice 2 (Noyau de la chaleur)**.** Soit $p_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\, e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$, $x \in \mathbb{R}^d$, $t > 0$.

1. Montrer que pour tout $t > 0$, $\int_{\mathbb{R}^d} p_t(x)\,\mathrm{d}x = 1$.
2. Montrer que pour tout $\delta > 0$, $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \int_{\{|x|>\delta\}} p_t(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
3. Soit $g \in \mathscr{C}_c(\mathbb{R}^d)$. Montrer que $p_t * g$ est bien définie pour tout $t > 0$ et que
$$\lim_{t\to 0^+} p_t * g(x) = g(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^d.$$
4. Soit $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Montrer que pour tout $t > 0$, $p_t * g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et que $\|p_t * g - g\|_p \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$.

Exercice 3 (Transformée de Fourier d'une gaussienne)**.** Soit $a > 0$. Pour $x \in \mathbb{R}^d$, on note $|x|$ sa norme euclidienne. Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{-a|x|^2}$.

1. Montrer que $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, puis calculer $\int_{\mathbb{R}^d} |f|$.
2. On suppose dans cette question que $d = 1$. Montrer que $\mathscr{F}(f)$ (la transformée de Fourier de f) vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 2. Résoudre cette équation différentielle.
3. Dans le cas général où $d \geq 1$, déterminer la transformée de Fourier de f.

Exercice 4 (Équation de la chaleur)**.** Soit $d \geq 1$. Soit $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.

1. On suppose qu'il existe $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ telle que $u - \Delta u = f$, où $\Delta = \sum_{k=1}^d \partial_k^2$.
   (a) Montrer que $\hat{u}$, la transformée de Fourier de u, vérifie $(1 + |\xi|^2)\hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$.
   (b) Montrer qu'il existe une unique fonction $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ vérifiant $u - \Delta u = f$.
2. Montrer qu'il existe $u :]0,+\infty[\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ vérifiant $\partial_t u - \Delta u = 0$ sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}^d$ vérifiant $\|u(t,\cdot) - f\|_2 \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$.

   Indication : voir aussi l'exercice 2.

Exercice 5 (Calcul de transformées de Fourier). 1. Soit $a > 0$. On note $f(x) = e^{-a|x|}$, $x \in \mathbb{R}$.

   (a) Montrer que $f \in L^1(\mathbb{R})$, et calculer la transformée de Fourier de f.

   (b) En déduire la valeur, en fonction de $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$ de $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos bx}{a^2 + x^2}\,\mathrm{d}x$.

2. Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{1}{1+|x|}$, $x \in \mathbb{R}$.

   Montrer que $g \in L^2(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R})$, puis Calculer la transformée de Fourier de g.

Exercice 6 (Transformée de Hilbert). Pour $0 < \varepsilon < M < \infty$ et $f \in L^2(\mathbb{R})$, on définit

$$H_{\varepsilon,M}f(x) = \int_{\varepsilon<|y|<M} \frac{f(x-y)}{y}\,\mathrm{d}y, \quad \text{p.p. } x \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$, $H_{\varepsilon,M}f \in L^2(\mathbb{R})$.
2. Donner l'expression de la transformée de Fourier de $H_{\varepsilon,M}f$ en fonction de la transf. de Fourier de f.
3. Montrer que pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$, $\big(H_{\varepsilon,M}f\big)_{0<\varepsilon<M<\infty}$ converge dans $L^2(\mathbb{R})$ ($\varepsilon \to 0^+$, $M \to +\infty$).