TD 5 – Dérivées partielles secondes et extremums

Exercice 1. On rappelle qu'une fonction $f : U \to \mathbb{R}$, de classe C^2 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, est dite harmonique si et seulement si $\Delta f = 0$, où $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ est appelé le laplacien de f.

1. Vérifier que $f : (x, y) \mapsto \arctan \dfrac{y}{x}$ est harmonique sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.
2. Montrer que si f est de classe C^3 et harmonique, alors $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y}$ sont harmoniques.

Exercice 2. Déterminer et classer les points critiques (en spécifiant s'ils sont des maximums, des minimums ou des points de selle) des fonctions suivantes définies par

- $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto 4xy - x^4 - y^4$
- $g : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (y^2 - x^2)e^{-x^2-y^2}$.
- $h : (x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \mapsto 4xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

Exercice 3. Soit $f : (x, y) \mapsto y^2 - 3x^2y + x^4$. En étudiant $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x, y)$ où y est bien choisi, montrer que f n'admet pas d'extremum global sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue et coercive, i.e. $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f admet un minimum global.
Application : en déduire que la fonction $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 3x + 6$ admet un minimum global.