Introduction à l'analyse
Correction du devoir maison.

Exercice 1 *Dans tout cet exercice, si A est un ensemble fini, on notera $|A|$ son cardinal, c'est-à-dire son nombre d'éléments. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $|E| = |F| = n$, on désigne les éléments de E et de F par : $E = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ et $F = \{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$.*

1. $f(E) = \{f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_n)\}$, *donc* $|f(E)| \leq n$. *On suppose (par l'absurde) que* $|f(E)| < n$. *Alors il existe* $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, $i \neq j$ *tels que :* $f(e_i) = f(e_j)$. *Mais f est injective, donc* $e_i = e_j$, *donc* $i = j$, *contradiction. Donc notre hypothèse de départ :* $|f(E)| < n$ *est fausse, donc* $|f(E)| \geq n$. *Or on a montré que* $|f(E)| \leq n$, *donc* $|f(E)| = n$. *On en déduit donc que* $f(E)$ *est un sous ensemble de F qui a le même nombre d'éléments que F, donc* $f(E) = F$.
2. *Si f n'est pas injective alors il existe* $e_i \neq e_j$ *tels que* $f(e_i) = f(e_j)$. *Donc l'ensemble* $f(E) = \{f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_n)\}$ *est de cardinal strictement inférieur à n. Donc* $f(E) \neq F$, *donc f n'est pas surjective.*
3. *on a montré : f injective $\Rightarrow$ f surjective. On a montré aussi $\neg$(f injective) $\Rightarrow$ $\neg$(f surjective), par contraposée, on a donc montré : f surjective $\Rightarrow$ f injective. Finalement on a montré :* $\boxed{f \text{ injective} \Leftrightarrow f \text{ surjective}}$.

   Par ailleurs, on a l'implication immédiate : f bijective $\Rightarrow$ f surjective. Maintenant si f est surjective alors par l'équivalence précédente, f est aussi injective. Donc f est bijective. On vient de montrer : f surjective $\Rightarrow$ f bijective, et donc par l'implication précédente, on a démontré que $\boxed{f \text{ surjective} \Leftrightarrow f \text{ bijective}}$.

   Les deux équivalences ci-dessus fournissent le résultat.
4. *Voici une application* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *injective mais non surjective :*

   $$f(n) = n + 1$$

   f est injective car si m et n sont deux entiers naturels alors $f(m) = f(n)$ signifie $n+1 = m+1$ donc $m = n$. Mais f n'est pas surjective car il n'existe pas d'entier naturel n tel que $f(n) = 0$.
   Voici une application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *surjective mais non injective :*

   $$\begin{cases} f(0) = 0, \\ f(1) = 0, \\ f(n) = n - 1, \ \text{si } n \geq 2. \end{cases}$$

   f est bien surjective car $f(0) = 0$ et si $n \geq 1$ alors $f(n+1) = n$. Par contre f n'est pas injective car $f(0) = f(1)$ et $1 \neq 0$.
   Remarquez que ce résultat ne rentre pas en contradiction avec les questions précédentes car ici $\mathbb{N}$ n'est pas de cardinal fini.

Exercice 2

1. $f(0+0) = f(0)^2$, *donc* $f(0) = f(0)^2$, *donc* $f(0) = 0$ *ou* $f(0) = 1$, *mais* $f(1+0) = f(1)f(0)$ *donc* $2 = f(1)f(0)$ *donc* $f(0) \neq 0$. *Donc* $f(0) = 1$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$, $f(x + (-x)) = f(x)f(-x)$ *donc* $f(0) = f(x)f(-x)$ *donc* $1 = f(x)f(-x)$. *Ainsi,* $f(x) \neq 0$ *et* $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$.
2. *Soit* $x \in \mathbb{R}$. *Pour* $n = 0$, $f(0x) = 1$ *et* $f(x) \neq 0$, *donc* $f(x)^0 = 1$. *Ainsi* $1 = f(0x) = f(x)^0$ *: l'initialisation est vraie. Faisons l'hypothèse de récurrence suivante : il existe* $n \geq 0$ *tel que* $f(nx) = f(x)^n$. *Alors pour un tel n, on a* $f((n+1)x) = f(nx + x) = f(nx)f(x)$, *et par hypothèse ;* $f(nx) = f(x)^n$ *donc :* $f((n+1)x) = f(x)^n f(x) = f(x)^{n+1}$. *Finalement la propriété est vraie pour* $n = 0$, *elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

3. *Soit* $n \in \mathbb{Z}$*. Si* $n \geq 0$*, alors* $n \in \mathbb{N}$ *et d'après la question précédente avec* $x = 1$*, on a* $f(n) = f(1)^n = 2^n$*. Si* $n < 0$ *alors* $-n \in \mathbb{N}$ *donc* $f(-n) = 2^{-n} = \frac{1}{2^n}$*. Mais d'après la question 1.,* $f(-n) = \frac{1}{f(n)}$*. Ainsi :* $\frac{1}{f(n)} = \frac{1}{2^n}$*, donc* $f(n) = 2^n$*.*

   Dans les deux cas, on a obtenu $f(n) = 2^n$*, donc* $\forall n \in \mathbb{Z}, f(n) = 2^n$*.*

4. *Soit* $r \in \mathbb{Q}$*, alors il existe* $p \in \mathbb{Z}$ *et* $q \in \mathbb{N}$ *tels que* $r = \frac{p}{q}$*. D'après la question 2., avec* $x = r$*, on a* $f(qr) = f(r)^q$*. Donc* $f(p) = f(r)^q$*, car* $qr = p$*. Mais d'après la question précédente,* $f(p) = 2^p$*. Finalement,* $2^p = f(r)^q$*, et donc* $2^{\frac{p}{q}} = f(r)$*, d'où* $f(r) = 2^r$*.*

5. *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites de rationnels tels que* $\forall n \in \mathbb{N}$*,* $a_n \leq x \leq b_n$ *et* $\lim a_n = \lim b_n = x$*. Puisque* f *est croissante, on a pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* $f(a_n) \leq f(x) \leq f(b_n)$*. D'après la question précédente,* $f(a_n) = 2^{a_n}$ *et* $f(b_n) = 2^{b_n}$*. Donc* $2^{a_n} \leq f(x) \leq 2^{b_n}$*. Par continuité de la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *:* $x \mapsto 2^x$*, on a* $\lim 2^{a_n} = 2^x$ *et* $\lim 2^{b_n} = 2^x$*. Donc d'après le Théorème des gendarmes,* $f(x) = 2^x$*.*