Calcul intégral

Résumé du cours

1 Intégration au sens de Riemann

1.1 Principes généraux

Définition 1. Une fonction réelle (ou complexe) f définie sur un intervalle $[a,b]$ est dite intégrable au sens de Riemann s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) tel que pour toute subdivision $\mathfrak{S} = \{x_k, 0 \leq k \leq n\}$ ($a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$) de l'intervalle $[a,b]$ et tout ensemble de points $\Xi = \{\xi_k, 1 \leq k \leq n\}$ ($\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$), on a

$$I(f, \mathfrak{S}, \Xi) \xrightarrow[|\mathfrak{S}| \to 0]{} \ell,$$

où $|\mathfrak{S}| = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k - x_{k-1}|$. Dans ce cas, on note $\ell = \displaystyle\int_a^b f$

Théorème 2. *Soit $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables au sens de Riemann, soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $c \in]a,b[$. Alors on a*

- *Linéarité : $f + \lambda g$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$ et $\displaystyle\int_a^b (f + \lambda g) = \int_a^b f + \lambda \int_a^b g$.*
- *Relation de Chasles : f est intégrable au sens de Riemann sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$ et $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$. En particulier, $\displaystyle\int_a^b f = -\int_b^a f$.*
- *Comparaison : si $f(t) \leq g(t)$ pour tout $t \in [a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f \leq \int_a^b g$.*
- *Inégalité triangulaire : $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$.*

Théorème 3. *Toute fonction continue par morceaux sur un intervalle $[a,b]$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$. En particulier, toute fonction continue l'est, ainsi que les fonctions en escalier.*

1.2 Techniques d'intégration

1. Primitive de fonctions usuelles : se reporter au formulaire.
2. Intégration par parties : soit $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$. Alors les produits uv' et $u'v$ sont intégrables au sens de Riemann comme produits de fonctions continues et on a
$$\int_a^b uv' = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'v.$$
3. Changement de variables : soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ bijective. Alors on a
$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \varphi' \cdot (f \circ \varphi) = \int_a^b f.$$
4. Primitives de fractions rationnelles : fonctions sous la forme $\frac{P}{Q}$ où P et Q sont deux polynômes. On identifie d'abord la partie entière E de $\frac{P}{Q}$ afin d'écrire $\frac{P}{Q} = E + \frac{P_1}{Q}$ où E et P_1 sont des polynômes avec $\deg(P_1) < \deg(Q)$ (on peut poser une division “comme quand on était petit” avec des polynômes plutôt que des entiers). Ensuite, on factorise le dénominateur Q en des polynômes de degré 1 et de polynômes irréductibles de degré 2 (avec un Δ négatif). Ensuite, vous devez vous rappeler comment on fait !

2 Intégrales généralisées

Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ (b peut être éventuellement égal à l'infini) une fonction localement intégrable au sens de Riemann sur $[a,b[$, c'est-à-dire que pour tout $c \in [a,b[$, f est intégrable au sens de Riemann sur $[a,c]$.

Définition 4. On dit que l'intégrale généralisée de f sur $[a,b[$ est convergente si la limite lorsque $c < b$ tend vers b de $\displaystyle\int_a^c f$ existe. Dans ce cas, on note $\displaystyle\int_a^b f = \lim_{c \to b} \int_a^c f$. Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale généralisée de f sur $[a,b[$ est divergente.

Si l'intégrale généralisée de $|f|$ sur $[a,b[$ est convergente, on dit que l'intégrale généralisée de f sur $[a,b[$ est absolument convergente.

Théorème 5. *Les conclusions du Théorème 2 sont valables aussi si f et g sont deux fonctions localement intégrables au sens de Riemann sur $[a,b[$ dont les intégrales généralisées sur $[a,b[$ convergent.*

2.1 Fonctions positives

Théorème 6. *Soit $f,g : [a,b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions positives localement intégrables au sens de Riemann sur $[a,b[$.*

- *On suppose que $f \sim g$ au voisinage de b. Alors $\displaystyle\int_a^b f$ et $\displaystyle\int_a^b g$ sont de même nature.*
- *On suppose $f \leq g$: si $\displaystyle\int_a^b g$ est convergente, alors $\displaystyle\int_a^b f$ est convergente et si $\displaystyle\int_a^b f$ est divergente, alors $\displaystyle\int_a^b g$ est divergente.*

Théorème 7 (Intégrales de Riemann)**.** *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit $f_\alpha :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ par $f_\alpha(t) = t^\alpha$. Alors on a*

- $\displaystyle\int_0^1 f_\alpha$ *est convergente si, et seulement si,* $\alpha > -1$ *;*
- $\displaystyle\int_1^\infty f_\alpha$ *est convergente si, et seulement si,* $\alpha < -1$.

En particulier, $\displaystyle\int_0^\infty f_\alpha$ *est toujours divergente.*

Théorème 8 (Comparaison série-intégrale)**.** *Soit $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue, positive, décroissante. Alors la série $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty f(k)$ et l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^\infty f$ sont de même nature.*

2.2 Intégrales semi-convergentes

L'intégrale généralisée de f sur $[a,b[$ est dite semi-convergente si elle est convergente, non absolument convergente. Pour généraliser la méthode utilisée pour montrer que $\int_1^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente, on a le théorème suivant.

Théorème 9 (Abel)**.** *Soit $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, positive, décroissante, de limite nulle en $+\infty$. Soit $g : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et G une primitive de g sur $[a,+\infty[$. On suppose que G est bornée sur $[a,+\infty[$. Alors l'intégrale généralisée du produit fg sur $[a,+\infty[$ est convergente.*

3 Intégrales dépendant d'un paramètre

3.1 Intégrales classiques dépendant d'un paramètre

Théorème 10 (Continuité)**.** *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ (éventuellement égal à $\mathbb{R}$). Soit $f : [a,b] \times I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b] \times I$. On définit $F : I \to \mathbb{R}$ par $F(x) = \int_a^b f(t,x)\,\mathrm{d}x$ pour tout $x \in I$. Alors F est continue sur I.*

Théorème 11 (Dérivabilité)**.** *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ (éventuellement égal à $\mathbb{R}$). Soit $f : [a,b] \times I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b] \times I$ telle que la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x} : [a,b] \times I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur $[a,b] \times I$. Alors $F : I \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_a^b f(t,x)\,\mathrm{d}t$ pour tout $x \in I$ est continue de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et*

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,\mathrm{d}t, \quad x \in I.$$

Théorème 12 (Bornes qui varient)**.** *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $u, v : I \to [a,b]$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur I. Alors la fonction $G : I \to \mathbb{R}$ définie par $G(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$, $x \in I$, est de classe $\mathscr{C}^1$ et*

$$G'(x) = v'(x) f\big(v(x)\big) - u'(x) f\big(u(x)\big), \quad x \in I.$$

3.2 Intégrales généralisées dépendant d'un paramètre

Définition 13. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $a < b \leq \infty$ (b peut éventuellement être égal à l'infini). Soit $f : [a,b[\times I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b[\times I$. On dit que f vérifie l'hypothèse de convergence dominée s'il existe $g : [a,b[\to [0,\infty[$ telle que

- $|f(t,x)| \leq g(t)$ pour tout $(t,x) \in [a,b[\times I$;
- l'intégrale généralisée de g sur $[a,b[$ est convergente.

Théorème 14 (Continuité)**.** *Soit $f : [a,b[\times I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b[\times I$ qui vérifie l'hypothèse de convergence dominée. Alors pour tout $x \in I$, l'intégrale généralisée de $f(\cdot,x)$ sur $[a,b[$ est absolument convergente pour tout $x \in I$ et la fonction $F : I \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_a^b f(t,x)\,\mathrm{d}t$ pour tout $x \in I$ est continue sur I*

Théorème 15 (Dérivabilité)**.** *Soit $f : [a,b[\times I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b[\times I$. On suppose qu'il existe $x_0 \in I$ tel que l'intégrale généralisée de $f(\cdot,x_0)$ sur $[a,b[$ est convergente. On suppose de plus que la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x} : [a,b[\times I \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a,b[\times I$ et vérifie l'hypothèse de convergence dominée. Alors pour tout $x \in I$, l'intégrale généralisée de $f(\cdot,x)$ sur $[a,b[$ est convergente pour tout $x \in I$ et la fonction $F : I \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_a^b f(t,x)\,\mathrm{d}t$ pour tout $x \in I$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I. De plus, on a*

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,\mathrm{d}t, \quad x \in I.$$

3.2.1 Application : transformée de Fourier

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue dont l'intégrale généralisée sur $\mathbb{R}$ est absolument convergente. On définit alors

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in \mathbb{R}.$$

La fonction $\hat{f}$ est appelée transformée de Fourier de f.

Théorème 16 (Riemann-Lebesgue)**.** *Sous les hypothèses énoncées plus haut, la fonction $\hat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et vérifie $\hat{f}(x) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0$.*