Cours “Analyse 2”

Licence 2 - Mathématiques - année 2017-2018

Université d’Aix Marseille

Table des matières

Chapitre 1

Séries numériques

1.1 Rappels sur les suites

Définition 1.1. (*i*) Une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels (ou de complexes) est convergente vers une limite a si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $|a_n - a| \leq \varepsilon$. On note $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

(*ii*) Une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite de Cauchy si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p, q \geq n_0$, on a $|a_p - a_q| \leq \varepsilon$.

Théorème 1.2. *Une suite de réels (ou de complexes) est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.*

Proposition 1.3 (Critères de comparaison)**.** (*i*) *Deux suites de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui convergent respectivement vers a et b vérifiant $a_n \leq b_n$ pour tout $n \geq n_0$ (pour un $n_0 \in \mathbb{N}$), vérifient $a \leq b$.*

(*ii*) *Pour trois suites de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $b_n \leq a_n \leq c_n$ pour tout $n \geq n_0$ (pour un $n_0 \in \mathbb{N}$) et telles que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite ℓ, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors convergente vers ℓ.*

Proposition 1.4. (*i*) *Une suite convergente est bornée.*

(*ii*) *Une suite monotone réelle bornée est convergente.*

Définition 1.5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe. Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante. On dit alors que $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite (ou sous-suite) de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition 1.6. *Une suite est convergente vers une limite ℓ si et seulement si toutes ses suites extraites convergent vers la même limite ℓ.*

Exercice 1.7. *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers ℓ si et seulement si les deux suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers ℓ.*

Preuve. L'implication « $\Longrightarrow$ »est évidente d'après la proposition ci-dessus. Montrons alors « $\Leftarrow$ ». Comme $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers ℓ, on a pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $|u_{2k} - \ell| < \varepsilon$ pour tout $k \geq n_1$ et il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $|u_{2k+1} - \ell| < \varepsilon$ pour tout $k \geq n_2$. On pose alors $n_0 = \max\{2n_1, 2n_2 + 1\}$, et on considère $n \geq n_0$. On a

$$\begin{aligned} |u_n - \ell| &= \begin{cases} |u_{2k} - \ell| & \text{si} \quad n \text{ est pair et vaut } n = 2k, \text{ avec } 2k \geq n_0 \geq 2n_1 \\ |u_{2k+1} - \ell| & \text{si} \quad n \text{ est impair et vaut } n = 2k+1, \text{ avec } 2k+1 \geq n_0 \geq 2n_2 + 1 \end{cases} \\ &< \varepsilon, \text{ d'après les définitions de } n_1 \text{ et } n_2, \end{aligned}$$

ce qui est la définition de la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ. □

1.2 Séries - Somme d'une série

Définition 1.8. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels (ou de complexes). On appelle série de terme général a_n et on note $\sum a_n$ la suite des sommes partielles $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

Définition 1.9 (Convergence d'une série)**.** (*i*) Soit $\sum a_n$ une série réelle ou complexe. Si la suite des sommes partielles $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, on dit que la série $\sum a_n$ est convergente. La limite de $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée somme de la série $\sum a_n$ et est notée $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ ou $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

(*ii*) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente, on dit que la série $\sum a_n$ diverge.

Exemple 1.10. (*a*) On considère la suite définie par $a_n = 2^{-n}$, $n \geq 0$. On a

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} 2^{-k} = \frac{1-2^{-(n+1)}}{1-2^{-1}} = 2 - 2^{-n} \longrightarrow 2 \quad \text{lorsque } n \to \infty.$$

Ainsi, la série $\sum 2^{-n}$ est convergente et $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = 2.$

(*b*) Soit maintenant $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ pour $n \geq 1$. On a pour tout $n \geq 1$

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \longrightarrow 1 \quad \text{lorsque } n \to \infty.$$

Ainsi, la série $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ est convergente et $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$

Théorème 1.11 (Critère de Cauchy)**.** *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle (ou complexe). La série $\sum a_n$ est convergente si et seulement si elle vérifie le critère de Cauchy : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p, q \geq n_0$ $(p \leq q)$ on a $\left|\sum_{k=p}^{q} a_k\right| \leq \varepsilon$.*

Preuve. Il suffit d'écrire le critère de Cauchy pour la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

Exemple 1.12. Étude de la convergence de la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$. Soit $1 \leq p \leq q$; on a

$$A_p = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k}, \quad A_q = \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k}.$$

Pour $q = 2p$, on a

$$A_{2p} - A_p = \sum_{k=p+1}^{2p} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=p+1}^{2p} \frac{1}{2p} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, la série harmonique ne vérifie pas le critère de Cauchy, elle n'est donc pas convergente.

Proposition 1.13. *Le terme général d'une série convergente tend vers* 0*. La réciproque est fausse.*

Preuve. Si $\sum a_n$ est convergente, alors $(A_n)_n$ est une suite convergente qui vérifie le critère de Cauchy, donc en particulier on a $(p = n-1,\ q = n)$: pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0 + 1$ on a $|a_n| = |A_n - A_{n-1}| \leq \varepsilon$.
Réciproque fausse : voir la série harmonique. □

Proposition 1.14. *Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries convergentes de sommes A et B. Alors pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la série de terme général $(\lambda a_n + \mu b_n)_n$ est convergente ; sa somme vaut alors $\lambda A + \mu B$.*

Preuve. Propriétés des suites convergentes $(A_n)_n$ et $(B_n)_n$. $\square$

Remarque 1.15. Il est possible que $\sum(\lambda a_n + \mu b_n)$ converge alors que ni $\sum a_n$, ni $\sum b_n$ ne convergent.

Exemple 1.16. $a_n = b_n = \frac{1}{n}$, $\lambda = 1$, $\mu = -1$.

Remarque 1.17. Si $\lambda \neq 0$, alors les deux séries $\sum(\lambda a_n)$ et $\sum a_n$ sont de même nature.

1.3 Séries absolument convergentes

Définition 1.18. La série $\sum a_n$ est dite absolument convergente si la série des valeurs absolues (ou des modules s'il s'agit d'une série à termes complexes) $\sum |a_n|$ est convergente.

Remarque 1.19. La suite $\left(\sum_{k=0}^{n} |a_k|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Pour montrer qu'elle converge, il suffit de montrer qu'elle est majorée.

Théorème 1.20. *Une série réelle ou complexe absolument convergente est convergente.*

Preuve. Critère de Cauchy et inégalité triangulaire. $\square$

Proposition 1.21 (Critères de comparaison)**.** *On considère $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries réelles ou complexes telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|a_n| \leq |b_n|$.*

(*i*) *Si $\sum b_n$ est absolument convergente, alors $\sum a_n$ est aussi absolument convergente et on a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |b_n|.$$

(*ii*) *Supposons $0 \leq a_n \leq b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si $\sum a_n$ est divergente, alors $\sum b_n$ est divergente.*

Preuve. Pour montrer (*i*), on utilise le critère de Cauchy pour les séries : il est vérifié pour $\sum |b_n|$ et donc aussi pour $\sum |a_n|$. Pour montrer (*ii*), il suffit de remarquer que si $\sum a_n$ n'est pas convergente, alors la suite des sommes partielles des b_n est une suite croissante non majorée, donc divergente. $\square$

Le résultat suivant donne un cirtère de convergence par des équivalents.

Proposition 1.22. *Soit $\sum a_n$ une série à termes dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $\sum b_n$ une série à termes réels positifs. On suppose que pour n au voisinage de l'infini, on a $a_n \sim \alpha b_n$ pour $\alpha \in \mathbb{C}$. On a*

(*i*) *si $\sum b_n$ converge, alors $\sum a_n$ est absolument convergente (donc convergente) ;*

(*ii*) *si $\sum b_n$ diverge, alors $\sum a_n$ diverge.*

Preuve. L'hypothèse $a_n \sim \alpha b_n$ au voisinage de l'infini donne $|a_n| \sim |\alpha| b_n$ au voisinage de l'infini. Donc, pour n assez grand, on a $|a_n - \alpha b_n| \leq \frac{1}{2}|\alpha| b_n$. Pour montrer (*i*), il suffit alors de voir que cette inégalité implique que $|a_n| \leq \frac{3}{2}|\alpha| b_n$ puis d'appliquer le critère de comparaison plus haut. Pour montrer (*ii*), on utilise l'inégalité triangulaire sur les sommes partielles et l'inégalité montrée plus haut :

$$|\alpha| \sum_{k=0}^{n} b_k - \left|\sum_{k=0}^{n} a_k\right| \leq \left|\sum_{k=0}^{n} (a_n - \alpha b_n)\right| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_n - \alpha b_n| \leq \frac{1}{2}|\alpha| \sum_{k=0}^{n} b_k,$$

ce qui implique

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k\right| \geq \frac{1}{2}|\alpha| \sum_{k=0}^{n} b_k.$$

Ainsi, la suite des sommes partielles des a_n n'est pas bornée, donc n'est pas convergente. $\square$

1.4 Séries de Riemann

Afin de décider si une série est (absolument) convergente ou non, on utilise les critères de comparaison du paragraphe précédent, ainsi qu'une échelle de séries de référence.

Définition 1.23. Toute série de la forme $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$ donné, est appelée série de Riemann.

Proposition 1.24. *La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.*

Preuve. On a déjà vu que pour $\alpha = 1$, la série $\sum \frac{1}{n}$ est la série harmonique qui est divergente. Dans le cas $\alpha < 1$, pour tout $n \geq 1$, on a $n^\alpha \leq n$ et donc $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{n^\alpha}$. Par principe de comparaison, comme $\sum \frac{1}{n}$ est divergente, la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est elle aussi divergente. Supposons maintenant $\alpha > 1$. Pour $n \geq 1$, on pose $a_n = \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$. On a alors $a_n \geq 0$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = 1 - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \longrightarrow 1$ lorsque $n \to \infty$. Ainsi, $\sum a_n$ est une série convergente. D'autre part, on a

$$a_n = \frac{1}{n^{\alpha-1}}\left(1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1-\alpha}\right) \sim \frac{\alpha-1}{n^\alpha} \qquad \text{lorsque } n \to \infty.$$

En appliquant la Proposition 1.22, et en remarquant que $\frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha-1} a_n$ au voisinage de l'infini, comme $\sum a_n$ est convergente, on obtient que la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ est convergente. □

Ceci nous permet donc de comparer des séries avec les séries de Riemann.
Premier critère. Soit $\sum a_n$ une série de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ telle qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{C}$ vérifiant $a_n \sim kn^{-\alpha}$ au voisinage de l'infini. Alors

- si $\alpha \leq 1$, alors $\sum a_n$ diverge ;
- si $\alpha > 1$, alors $\sum a_n$ converge absolument.

Preuve. Conséquence de la convergence des séries de Riemann et de la Proposition 1.22. □

Deuxième critère. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ telle qu'il existe $\alpha > 1$ avec $(n^\alpha a_n)_{n\geq 1}$ bornée. Alors la série $\sum a_n$ est absolument convergente.

Preuve. Pour $n \geq 1$, on a $|n^\alpha a_n| \leq M$, ce qui implique $|a_n| \leq \frac{M}{n^\alpha}$. On applique alors la Proposition 1.21. □

Exemple 1.25. Soit $N \in \mathbb{N}$, soit $a_n = n^N e^{-n}$, $n \geq 1$. On a pour $\alpha = 2$ par exemple

$$|n^2 a_n| = n^{N+2} e^{-n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Ainsi, la suite $(n^2 a_n)_{n\geq 1}$ est convergente, donc bornée. D'après le deuxième critère ci-dessus ($\alpha = 2 > 1$), on en déduit que la série $\sum a_n$ est absolument convergente. Voir aussi la version "intégrales généralisées" dans l'Exercice **??**.

1.5 Règles de Cauchy et de d'Alembert

Une autre collection de séries de référence pour décider si une série est convergente ou non est étudiée dans ce paragraphe. Il s'agit des séries géométriques.

Définition 1.26. Toute série de la forme $\sum a^n$ où $a \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est dite géométrique.

Proposition 1.27. *(i) Si $|a| \geq 1$, alors $\sum a^n$ est divergente.*
(ii) Si $|a| < 1$, alors $\sum a^n$ est absolument convergente.

Preuve. Pour $a \neq 1$, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$ et si $a = 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k = n+1$. Ainsi, il est clair que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k$ admet une limite lorsque n tend vers l'infini si et seulement si $|a| < 1$. □

Définition 1.28 (Limites supérieure et inférieure)**.** Pour $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, on note

— $\limsup_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \sup\{u_k, k \geq n\}$ (éventuellement égale à $+\infty$) et on l'appelle limite supérieure de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$;

— $\liminf_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \inf\{u_k, k \geq n\}$ (éventuellement égale à $-\infty$) et on l'appelle limite inférieure de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 1.29. Pour la suite définie par $u_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, on a $\limsup_{n\to\infty} u_n = 1$ et $\liminf_{n\to\infty} u_n = -1$.

Proposition 1.30. *Une suite est convergente si et seulement si sa limite supérieure et sa limite inférieure sont égales.*

Preuve. " $\Rightarrow$ " : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de limite ℓ. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0(\varepsilon)$, on a

$$|u_n - \ell| < \varepsilon,$$

ou encore

$$\ell - \varepsilon \overset{(1)}{<} u_n \overset{(2)}{<} \ell + \varepsilon.$$

Les inégalités (1) et (2) impliquent alors que pour tout $n \geq n_0(\varepsilon)$,

$$\ell - \varepsilon \leq \inf\{u_k, k \geq n\} \leq \sup\{u_k, k \geq n\} \leq \ell + \varepsilon.$$

Ainsi, en prenant la limite lorsque n tend vers l'infini dans cette triple inégalité, on obtient pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\ell - \varepsilon \leq \liminf_{n\to\infty} u_n \leq \limsup_{n\to\infty} u_n \leq \ell + \varepsilon.$$

Comme ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on peut prendre la limite de la triple inégalité ci-dessus lorsque ε tend vers 0, et on obtient

$$\ell \leq \liminf_{n\to\infty} u_n \leq \limsup_{n\to\infty} u_n \leq \ell,$$

ce qui montre la première implication de l'énoncé.
" $\Leftarrow$ " : inversement, supposons que

$$\limsup_{n\to\infty} u_n = \liminf_{n\to\infty} u_n = \ell.$$

Il faut alors montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. Par définition,

$$\limsup_{n\to\infty} u_n = \ell$$

s'écrit aussi de la manière suivante : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_1(\varepsilon)$ tel que pour tout $n \geq n_1(\varepsilon)$, on a

$$\ell - \varepsilon \leq \sup\{u_k, k \geq n\} \leq \ell + \varepsilon,$$

ce qui implique que pour tout $n \geq n_1(\varepsilon)$, on a

$$u_n \leq \ell + \varepsilon. \tag{1.1}$$

De la même manière, d'après la définition de la limite inférieure, on déduit de

$$\liminf_{n\to\infty} u_n = \ell$$

l'existence, pour tout $\varepsilon > 0$, d'un $n_2(\varepsilon)$ tel que pour tout $n \geq n_2(\varepsilon)$, on a

$$\ell - \varepsilon \leq \inf\{u_k, k \geq n\} \leq \ell + \varepsilon,$$

ce qui implique que pour tout $n \geq n_2(\varepsilon)$, on a

$$\ell - \varepsilon \leq u_n. \tag{1.2}$$

De (1.1) et (1.2), on déduit que pour tout $n \geq N(\varepsilon)$, avec $N(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$, on a

$$\ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon,$$

ce qui est la définition de $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell$. □

Théorème 1.31 (Règle de d'Alembert)**.** *Soit* $\sum a_n$ *une série à termes dans* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *telle qu'il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *vérifiant : pour tout* $n \geq n_0$*,* $a_n \neq 0$*. On pose* $L = \limsup_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ *(L vaut éventuellement* $+\infty$*) et* $\ell = \liminf_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$.

(i) Si $L < 1$*, alors* $\sum a_n$ *est absolument convergente.*
(ii) Si $\ell > 1$*, alors* $\sum a_n$ *est divergente.*
(iii) Si $\ell \leq 1 \leq L$*, on ne peut pas conclure.*

Preuve. (i) Supposons que $L < 1$, alors, par définition de la limite supérieure, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0(\varepsilon)$, on a

$$L - \varepsilon \leq \sup \left\{ \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} ; k \geq n \right\} \leq L + \varepsilon.$$

En prenant $\varepsilon = \frac{1-L}{2}$, on obtient : pour tout $n \geq n_0(\frac{1-L}{2}) = n_0$, $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq \frac{1+L}{2} = \gamma < 1$. On montre alors facilement par récurrence que pour tout $n \geq n_0$, on a

$$|a_n| \leq \gamma^n \frac{|a_{n_0}|}{\gamma^{n_0}}.$$

Comme la série $\sum \gamma^n$ est convergente (car $\gamma < 1$), par comparaison, on en déduit que la série $\sum |a_n|$ est convergente, et donc que $\sum a_n$ est absolument convergente.
(ii) Dans le cas où $\ell > 1$, on montre de la même manière qu'il existe un $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_1$, on a

$$|a_n| \geq c^n \frac{|a_{n_1}|}{c^{n_1}},$$

où $c = \frac{\ell+1}{2} > 1$. Ceci implique alors que le terme général de la série $\sum a_n$ ne tend pas vers 0, et donc que la série $\sum a_n$ est divergente d'après la Proposition 1.13.
(iii) Pour le cas des séries de Riemann, on a quelque soit $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^\alpha} \longrightarrow 1 \quad \text{lorsque } n \to \infty,$$

donc $\ell = L = 1$. Or la série de Riemann converge si et seulement si $\alpha > 1$ (Proposition 1.24). Ainsi, la connaissance de $\ell \leq 1 \leq L$ ne suffit pas pour conclure à la nature de la série $\sum a_n$. □

Théorème 1.32 (Règle de Cauchy)**.** *Soit* $\sum a_n$ *une série à termes dans* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*. On note*

$$\lambda = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}.$$

Alors on a

(i) Si $\lambda < 1$*, alors la série* $\sum a_n$ *est absolument convergente.*
(ii) Si $\lambda > 1$*, alors la série* $\sum a_n$ *est divergente.*
(iii) Si $\lambda = 1$*, on ne peut pas conclure.*

Preuve. La preuve de la règle de Cauchy est semblable à la preuve de la règle de d'Alembert.
(i) Supposons dans un premier temps que $\lambda < 1$. On a alors, pour n assez grand ($n \geq n_0$), $|a_n| \leq \mu^n$ où $\mu = \frac{1+\lambda}{2} < 1$, ce qui nous permet de conclure comme dans le théorème précédent.
(ii) Si on a maintenant $\lambda > 1$, on montre qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a

$$\sup\{|a_k|^{\frac{1}{k}}, k \geq n\} \geq \frac{1+\lambda}{2}$$

et donc pour tout $n \geq n_0$, il existe $k \geq n$ ($k = \varphi(n)$) tel que $|a_k|^{\frac{1}{k}} \geq \frac{3+\lambda}{4} > 1$. On construit ainsi une suite extraite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$|a_{\varphi(n)}| \geq \left(\frac{3+\lambda}{4}\right)^{\varphi(n)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Cette suite extraite ne converge pas vers 0, donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas non plus vers 0. Par la Proposition 1.13, on en déduit que la série $\sum a_n$ est divergente.
(iii) Enfin, les séries de Riemann donnent un exemple de cas où $\lambda = 1$ et où on ne peut pas conclure quant à la convergence ou non de la série (par la seule connaissance de $\limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$). $\square$

Proposition 1.33 (Comparaison des deux règles)**.** *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle de termes strictement positifs telle que $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ. Alors la suite $\left(a_n^{\frac{1}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers ℓ.*

Remarque 1.34. L'inverse n'est pas vrai. Soit $0 < a < 1$. On pose

$$a_n = \begin{cases} a^{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ pair} \\ a^{\frac{n-1}{2}+1} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

Alors on a $\dfrac{a_{2n+1}}{a_{2n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ et $\dfrac{a_{2n+2}}{a_{2n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, donc d'après l'Exercice 1.7, $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas convergente ; sa limite supérieure est 1 et sa limite inférieure est a : on ne peut donc pas déterminer la nature de la série $\sum a_n$ grâce à la règle de d'Alembert. En revanche, il est facile de voir que $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \sqrt{a} < 1$ en étudiant les suites d'indices pairs et d'indices impairs et en appliquant le résultat de l'Exercice 1.7 ; la série $\sum a_n$ est absolument convergente grâce à la règle de Cauchy.

Preuve de la Proposition 1.33. Si $\ell = 0$, on a : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \varepsilon.$$

Par récurrence, comme dans la preuve de la règle de d'Alembert, on montre alors par récurrence que

$$0 \leq a_n \leq \varepsilon^n \, \frac{a_{n_0}}{\varepsilon^{n_0}} \qquad \forall\, n \geq n_0.$$

Ainsi, on a pour tout $n \geq n_0$

$$0 \leq a_n^{\frac{1}{n}} \leq \varepsilon \left(\frac{a_{n_0}}{\varepsilon^{n_0}}\right)^{\frac{1}{n}} \longrightarrow \varepsilon \quad \text{lorsque } n \to \infty.$$

D'où $(a_n^{\frac{1}{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente vers 0.
Dans le cas où $\ell > 0$, on montre de la même manière que pour tout $\varepsilon \in]0, \frac{\ell}{2}[$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - \ell\right| \leq \varepsilon.$$

Par récurrence, comme dans la preuve de la règle de d'Alembert, on montre alors par récurrence que

$$(\ell - \varepsilon)^n \, \frac{a_{n_0}}{(\ell+\varepsilon)^{n_0}} \leq a_n \leq (\ell + \varepsilon)^n \, \frac{a_{n_0}}{(\ell+\varepsilon)^{n_0}} \qquad \forall\, n \geq n_0.$$

Ainsi, on a pour tout $n \geq n_0$

$$\ell - \varepsilon \xleftarrow[\infty \leftarrow n]{} (\ell - \varepsilon) \left(\frac{a_{n_0}}{(\ell+\varepsilon)^{n_0}}\right)^{\frac{1}{n}} \leq a_n^{\frac{1}{n}} \leq (\ell + \varepsilon) \left(\frac{a_{n_0}}{(\ell+\varepsilon)^{n_0}}\right)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell + \varepsilon.$$

D'où $(a_n^{\frac{1}{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente vers ℓ. $\square$

1.6 Séries semi-convergentes

Définition 1.35. Une série semi-convergente est une série convergente non absolument convergente.

Théorème 1.36 (Séries alternées)**.** *Soit* $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle décroissante ayant pour limite* 0*. Alors la série* $\sum(-1)^n\varepsilon_n$ *est convergente.*

Démonstration. On pose $A_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\varepsilon_k$. Les suites $(A_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(A_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. En effet, comme $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, on a

$$A_{2n+2} = A_{2n} - \varepsilon_{2n+1} + \varepsilon_{2n+2} \leq A_{2n}$$

donc $(A_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. De même, on montre que $(A_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $A_{2n+1}\leq A_{2n}$. Ainsi, la suite $(A_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante majorée et $(A_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante minorée : elles sont toutes deux convergentes respectivement vers A et B. On a alors $A\leq B$. D'autre part,

$$|A_{2n+1} - A_{2n}| = \varepsilon_{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

et donc $A = B$. La suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite dont la suite extraite des indices pairs et la suite extraite des indices impairs convergent vers la même limite : $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergente d'après l'Exercice 1.7 (vers cette limite commune), ce qui est la définition d'une série convergente (la suite des sommes partielles est convergente). □

Exemple 1.37. La série $\sum\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est convergente pour tout $\alpha>0$, non absolument convergente si $0<\alpha\leq 1$ (séries de Riemann).

Définition 1.38 (Transformation d'Abel)**.** Soit $a_n = \varepsilon_n b_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. On pose $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$. Alors pour tous $n,p\in\mathbb{N}$, on a l'égalité suivante appelée la transformation d'Abel

$$\sum_{k=1}^{p} a_{n+k} = \sum_{k=1}^{p}(\varepsilon_{n+k}-\varepsilon_{n+k+1})B_{n+k} - \varepsilon_{n+1}B_n + \varepsilon_{n+p+1}B_{n+p}.$$

Remarque 1.39. La transformation d'Abel est une « intégration par partie discrète ». Il suffit de voir les B_n comme des primitives des b_k, les différences $\varepsilon_{n+1}-\varepsilon_n$ comme des dérivées des ε_k.

Théorème 1.40 (Théorème d'Abel)**.** *Soit* $\sum a_n$ *une série réelle ou complexe telle que pour tout* $n\in\mathbb{N}$*, on a* $a_n = \varepsilon_n b_n$ *avec*

- *(i) la suite* $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée (où* $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$*) ;*
- *(ii) la suite* $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente vers* 0 *;*
- *(iii) la série* $\sum|\varepsilon_n-\varepsilon_{n+1}|$ *est convergente.*

Alors la série $\sum a_n$ *est convergente.*

Remarque 1.41. Le cas des séries alternées est un cas particulier du théorème d'Abel. Il suffit en effet de poser $b_n = (-1)^n$ et on a $\left|\sum_{k=0}^{n} b_n\right| \leq 1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et si $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante vers 0, on a

$$\sum_{k=0}^{n}|\varepsilon_k-\varepsilon_{k+1}| = \sum_{k=0}^{n}(\varepsilon_k-\varepsilon_{k+1}) = \varepsilon_0-\varepsilon_{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \varepsilon_0.$$

Preuve du théroème d'Abel. On vérifie de critère de Cauchy pour la série $\sum a_n$ en utilisant la transformation d'Abel et les hypothèses du théorème :

$$\left|\sum_{k=1}^{p} a_{n+k}\right| \leq \left(\sup_{k\in\mathbb{N}}|B_k|\right)\left(\sum_{k=1}^{p}|\varepsilon_{n+k}-\varepsilon_{n+k+1}| + (|\varepsilon_{n+1}|+|\varepsilon_{n+p+1}|)\right) \xrightarrow[n,p\to\infty]{} 0.$$

□

Exemple 1.42. La série $\sum \frac{e^{i\lambda n}}{n^\alpha}$ est convergente pour $0 < \alpha \leq 1$ si $\lambda \notin 2\pi\mathbb{Z}$.

En effet, on pose $b_n = e^{i\lambda n}$ et $\varepsilon_n = \frac{1}{n^\alpha}$. La suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante vers 0 et on a pour $\lambda \notin 2\pi\mathbb{Z}$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} e^{i\lambda k}\right| = \left|e^{i\lambda}\frac{1-e^{i\lambda n}}{1-e^{i\lambda}}\right| = \left|\frac{\sin(\lambda\frac{n}{2})}{\sin\frac{\lambda}{2}}\right| \leq \frac{1}{|\sin\frac{\lambda}{2}|}.$$

Les hypothèses du théorème d'Abel sont vérifiées, la série est convergente, non absolument convergente car $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge si $0 < \alpha \leq 1$.

1.7 Compléments

Dans le cas très particulier où le terme général d'une série dont on veut étudier la convergence provient d'une fonction décroissante sur $[0,\infty[$, on peut comparer l'intégrale de cette fonction et la série. Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ décroissante positive. On définit $a_n = f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors on a pour tout $n \geq 0$

$$a_{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(t)\ dt \leq a_n.$$

En effet, il suffit de remarquer que $a_{n+1} = f(n+1) \leq f(t) \leq f(n) = a_n$ pour tout $t \in [n, n+1]$ et d'intégrer entre n et$n+1$. Ainsi, en sommant entre 0 et N, on a

$$\sum_{k=1}^{N+1} a_k = \sum_{n=0}^{N} a_{n+1} \leq \int_0^{N+1} f(t)\ dt \leq \sum_{n=0}^{N} a_n.$$

Ainsi, on montre que l'intégrale de f sur $[0,+\infty[$ et la série $\sum a_n$ sont de même nature.

Exemple 1.43. Pour $\alpha > 0$, on considère la fonction $f : [1,\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$, $t \geq 1$. Alors on a

$$\sum_{k=2}^{N+1} \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_1^{N+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha}, \quad N \geq 1.$$

On retrouve ainsi le fait que si $\alpha \leq 1$, alors la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est divergente et si $\alpha > 1$, alors la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente.

1.8 Proposition d'exercices

Exercice 1.44 (Séries de Bertrand)**.** *Étudier, selon les valeurs de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la convergence de la série de terme général $a_n = \dfrac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$, $n \geq 2$.*

Indications. On pourra s'inspirer de l'Exercice **??** sur les intégrales de Bertrand pour la version « intégrales généralisées ». □

Exercice 1.45. (*a*) *Calculer, pour $n \geq 1$ et $t \in \mathbb{R}$ la somme, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos kt$.*

(*b*) *Montrer, en utilisant la transformation d'Abel, que la série de terme général*

$$\frac{\cos n}{n},\ n \geq 1$$

est convergente.

(*c*) *En remarquant que*

$$|\cos t| \geq (\cos t)^2 = \frac{1}{2}(1+\cos 2t), \quad t \in \mathbb{R},$$

montrer que la série $\sum \frac{\cos n}{n}$ n'est pas absolument convergente.

Chapitre 2

Suites et séries d'applications

Dans tout ce chapitre, $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ (ou éventuellement $a = -\infty$, et/ou $b = +\infty$). Pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sont des fonctions définies sur l'intervalle $[a, b]$ (ou $\mathbb{R}$ ou $[-\infty, b]$ ou $[a, +\infty[$).

2.1 Convergence simple

Définition 2.1 (Convergence simple)**.** On dit qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sur $[a, b]$ si pour tout $x \in [a, b]$, la suite réelle (ou complexe) $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.

Remarque 2.2. La convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f peut alors se définir par : pour tout $x \in [a, b]$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0(x, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0(x, \varepsilon)$, on a $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.

Exemple 2.3. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1]$, on pose $f_n(x) = x^n$. Alors pour $x \in [0, 1[$, $f_n(x) = x^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et si $x = 1$, on a $f_n(1) = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Ainsi, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 0$ si $0 \leq x < 1$ et $f(1) = 1$.

Proposition 2.4. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions qui converge simplement vers f sur $[a, b]$.*

(*i*) *Si f_n est croissante (respectivement décroissante) sur $[a, b]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors f est croissante (respectivement décroissante) sur $[a, b]$.*

(*ii*) *Si f_n est convexe sur $[a, b]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors f est convexe sur $[a, b]$.*

Preuve. (*i*) Supposons que f_n est croissante sur $[a, b]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors pour tous $x, y \in [a, b]$, $x \leq y$, on a $f_n(x) \leq f_n(y)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Les inégalités larges étant conservées par passage à la limite, on a alors $f(x) \leq f(y)$, ce qui implique que f est croissante. De même dans le cas où les fonctions sont décroissantes.
(*ii*) Supposons maintenant que f_n est convexe sur $[a, b]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors pour tous $x, y \in [a, b]$ et pour tout $t \in [0, 1]$, on a

$$f_n(tx + (1-t)y) \leq t f_n(x) + (1-t) f_n(y), \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Comme plus haut, les inégalités larges étant conservées par passage à la limite, on a

$$f(tx + (1-t)y) \leq t f(x) + (1-t) f(y), \qquad \text{pour tous } x, y \in [a, b],\ t \in [0, 1].$$

Ceci prouve que f est convexe sur $[a, b]$. □

Remarque 2.5. Même si on sait que les fonctions f_n sont strictement croissantes, on ne peut pas en déduire que f est strictement croissante, les inégalités strictes devenant large par passage à la limite. Pour illustrer, voir l'exemple 2.3 : les f_n sont toutes strictement croissantes sur $[0, 1]$, mais la limite f est constante sur $[0, 1[$.

2.2 Convergence uniforme

Définition 2.6 (Convergence uniforme)**.** On dit qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sur $[a,b]$ si

$$\sup_{a\leq x\leq b} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0(\varepsilon)$, on a $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in [a,b]$.

Remarque 2.7. Dans la définition de la convergence simple, le rang à partir duquel $|f_n(x) - f(x)|$ est petit dépend de x, ce qui n'est pas le cas pour la convergence uniforme.

Proposition 2.8. *Une suite qui converge uniformément converge simplement vers la même limite.*

Preuve. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$. Pour tout $x \in [a,b]$, on a

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{a\leq y\leq b} |f_n(y) - f(y)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

ce qui montre la convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f sur $[a,b]$. □

Exemple 2.9. On reprend l'exemple 2.3 ; on veut étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a, pour tout $n \geq 1$:

$$\sup_{0\leq x\leq 1} |x^n - f(x)| = 1,$$

où f est la limite simple déterminée dans l'exemple 2.3 ($f(x) = 0$ si $0 \leq x < 1$ et $f(1) = 1$). En effet, $\sup_{0\leq x<1} |x^n| = 1$: 1 est un majorant de $\{x^n, 0 \leq x < 1\}$ et pour tout $\ell < 1$, en posant $x = \left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$, on a : $x \in [0,1[$ et $x^n = \frac{\ell+1}{2} > \ell$, donc ℓ n'est pas un majorant de $\{x^n, 0 \leq x < 1\}$.

Théorème 2.10 (Critère de Cauchy uniforme)**.** *Une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément si et seulement si elle vérifie le critère de Cauchy suivant :*

$$\sup_{a\leq x\leq b} |f_p(x) - f_q(x)| \xrightarrow[p,q\to\infty]{} 0.$$

Ou encore : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p, q \geq N(\varepsilon)$, on a $|f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in [a,b]$.

Preuve. "⇒" Supposons que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f. Alors on a pour tous $p, q \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [a,b]$:

$$\begin{aligned} |f_p(x) - f_q(x)| &\leq |f_p(x) - f(x)| + |f_q(x) - f(x)| \\ &\leq \sup_{a\leq y\leq b} |f_p(y) - f(y)| + \sup_{a\leq y\leq b} |f_q(y) - f(y)|, \end{aligned}$$

et donc

$$\sup_{a\leq x\leq b} |f_p(x) - f_q(x)| \leq \sup_{a\leq y\leq b} |f_p(y) - f(y)| + \sup_{a\leq y\leq b} |f_q(y) - f(y)| \xrightarrow[p,q\to\infty]{} 0.$$

"⇐" Supposons maintenant que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie le critère de Cauchy. Soit $x \in [a,b]$. Il est facile de voir que $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). Elle est donc convergente ; on note $f(x)$ sa limite. On a alors, pour tout $x \in [a,b]$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0(x,\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0(x,\varepsilon)$, on a $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$. Ainsi, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f. Montrons que cette convergence est uniforme. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Soit $n \geq N(\varepsilon)$. Pour $x \in [a,b]$, soit $p = \max\{N(\varepsilon), n_0(x,\varepsilon)$; on a

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_p(x)| + |f_p(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon.$$

On a ainsi trouvé $N(\varepsilon)$ tel que pour tout $x \in [a,b]$, $|f_n(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon$, ce qui est la définition de la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f.

Ce qui montre l'équivalence entre la convergence uniforme et le critère de Cauchy uniforme. □

On a vu dans l'exemple 2.3 que la convergence simple ne suffit pas pour conserver la continuité par passage à la limite. La bonne notion est la convergence uniforme, comme on va le voir.

Théorème 2.11 (Continuité)**.** *On suppose que f_n est continue en un point $c \in [a,b]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$, alors f est continue au point c.*

Preuve. Pour $x \in [a,b]$, on a

$$f(x) - f(c) = f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(c) + f_n(c) - f(c).$$

Pour montrer la continuité de f au point c, il faut montrer que $|f(x) - f(c)|$ est petit lorsque x est proche de c. On traite les deux termes $|f_n(x) - f(x)|$ et $|f_n(c) - f(c)|$ grâce à la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f et le terme $|f_n(x) - f_n(c)|$ grâce à la continuité de f_n. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in [a,b]$. Pour ce n_0, f_{n_0} est continue, donc il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in [a,b]$, $|x - c| \leq \delta$, on a $|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(c)| \leq \varepsilon$. Ainsi, on a pour tout $x \in [a,b]$, $|x - c| \leq \delta$,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(c)| &\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(c)| + |f_{n_0}(c) - f(c)| \\ &\leq 2 \sup_{y\in[a,b]} |f_{n_0}(y) - f(y)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(c)| \leq 3\varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui démontre la continuité de f au point c. □

Théorème 2.12 (Intégration)**.** *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues qui converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f. Alors*

$$\int_a^b f_n(t)dt \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f(t)dt.$$

Preuve. Il suffit de remarquer que, d'après le théorème précédent, f est continue (donc intégrable) et que l'on a

$$\left| \int_a^b (f_n(t) - f(t))dt \right| \leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)|dt \leq (b-a) \sup_{t\in[a,b]} |f_n(t) - f(t)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

grâce à la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f. □

Théorème 2.13 (Dérivation)**.** *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle $[a,b]$, dérivables, de dérivées continues, telle que la suite des dérivées $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction g sur $[a,b]$ et telle que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur $[a,b]$. Alors f est continue, dérivable, et $f' = g$.*

Preuve. Il suffit de remarquer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)dt, \quad x \in [a,b]. \tag{2.1}$$

D'après le Théorème 2.12, on a

$$\int_a^x f_n'(t)dt \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^x g(t)dt$$

et donc, en prenant la limite lorsque n tend vers l'infini de (2.1), on obtient

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)dt, \quad x \in [a,b].$$

On en déduit alors que f est continue et dérivable, comme intégrale de la borne supérieure d'une fonction continue, et que $f'(x) = g(x)$ pour tout $x \in [a,b]$. □

Ces théorèmes peuvent se déduire du théorème suivant concernant les conditions dans lesquelles on peut "intervertir des limites".

Théorème 2.14 (Interversion de limites)**.** *Soit Λ un ensemble d'indices ($\Lambda = \mathbb{N}$ ou $\Lambda = [\alpha, \beta]$ un intervalle,...). Soit $\{f_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ une famille de fonctions définies sur un intervalle $[a, b]$, qui converge uniformément vers f lorsque λ tend vers λ_0 ($\lambda_0 = \infty$ si $\Lambda = \mathbb{N}$). On suppose d'autre part que pour tout $\lambda \in \Lambda$, $f_\lambda(x) \xrightarrow[x \to c]{} f_\lambda(c)$ pour un $c \in [a, b]$. Alors on a*

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \left(\lim_{x \to c} f_\lambda(x) \right) = \lim_{x \to c} \left(\lim_{\lambda \to \lambda_0} f_\lambda(x) \right)$$

Preuve. La preuve est sur le même modèle que la preuve du Théorème 2.11. Il s'agit en fait de montrer que

$$f(c) = \lim_{\lambda \to \lambda_0} \left(\lim_{x \to c} f_\lambda(x) \right) = \lim_{x \to c} \left(\lim_{\lambda \to \lambda_0} f_\lambda(x) \right) = \lim_{x \to c} f(x).$$

On écrit alors

$$f(x) - f(c) = f(x) - f_\lambda(x) + f_\lambda(x) - f_\lambda(c) + f_\lambda(c) - f(c),$$

et la démonstration suit les mêmes étapes que la preuve du Théorème 2.11. □

2.3 Approximation polynômiale

Dans cette partie, on montre comment une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ peut être approchée uniformément par des polynômes.

Définition 2.15. Une fonction continue sur $I \subset \mathbb{R}$ est dite uniformément continue sur I si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tous $x, y \in I$ avec $|x - y| < \alpha$, on a $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Remarque 2.16. La continuité uniforme d'une fonction nous assure que, dans la définition de la continuité, on peut choisir α indépendant du point où on regarde la continuité, α ne dépend que de ε.

Théorème 2.17 (Heine, Borel-Lebesgue)**.** *Une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ ($-\infty < a < b < +\infty$) de $\mathbb{R}$ est uniformément continue sur $[a, b]$.*

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Soit $x \in [a, b]$: f est continue en x, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha(x, \varepsilon) > 0$ tel que pour tout $y \in [a, b]$ avec $|x - y| < \alpha(x, \varepsilon)$, on a $f(x) - f(y)| < \varepsilon$. On pose $I_{x,\varepsilon} = \left] x - \dfrac{\alpha(x, \varepsilon)}{2}, x + \dfrac{\alpha(x, \varepsilon)}{2} \right[$. On a :

$$[a, b] \subset \bigcup_{x \in [a,b]} I_{x,\varepsilon}.$$

Soit $E = \{t \in [a, b]; [a, t]$ peut être recouvert par un nombre fini de$I_{x,\varepsilon}\}$. Comme $a \in E$ ($[a, a] \subset I_{a,\varepsilon}$) et que $E \subset [a, b]$, E est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$: E admet une borne supérieure finie. Soit $\beta = \sup E$: $\beta \leq b$. Montrons que $\beta \in E$. On a $\beta \in I_{\beta,\varepsilon}$. On choisit $\gamma = \beta - \frac{\alpha(\beta,\varepsilon)}{4}$. Par définition de la borne supérieure, $\gamma \in E$ et donc $[a, \gamma]$ peut être recouvert par un nombre fini d'intervalles $I_{x,\varepsilon}$. Si on ajoute à ce nombre fini l'intervalle $I_{\beta,\varepsilon}$, on a encore un recouvrement fini et $[a, \beta]$ est inclus dans la réunion de ces intervalles. Ainsi, $\beta \in E$. Montrons maintenant que $\beta = b$. En raisonnant par l'absurde, supposons que $\beta < b$. Alors on pose $\gamma = \beta + \frac{\alpha(\beta,\varepsilon)}{4}$: $\gamma \in]\beta, b]$ et $[a, \gamma] = [a, \beta] \cup [\beta, \gamma]$ peut être recouvert par un nombre fini d'intervalles $I_{x,\varepsilon}$: le nombre fini qui recouvre $[a, \beta]$ en y ajoutant l'intervalle $I_{\beta,\varepsilon}$. D'où $\gamma \in E$ et $\gamma > \beta$, ce qui est en contradiction avec $\beta = \sup E$. Ainsi, on vient de montrer qu'il existe un nombre fini d'intervalles $I_{x,\varepsilon}$ dont la réunion contient $[a, b]$, c'est-à-dire qu'il existe $n \geq 1$ et $x_1, x_2, ..., x_n \in [a, b]$ tels que

$$[a, b] \subset \bigcup_{k=1}^{n} I_{x_k,\varepsilon}.$$

On pose alors $\alpha = \min\{\frac{\alpha(x_k,\varepsilon)}{2}, k = 1, ..., n\}$ (α ne dépend que de ε). Soit $x \in [a, b]$: il existe $k = 1, ..., n$ tel que $x \in I_{x_k,\varepsilon}$. Soit $y \in [a, b]$ avec $|x - y| < \alpha$:

$$|y - x_k| \leq |y - x| + |x - x_k| < \alpha + \frac{\alpha(x_k, \varepsilon)}{2} \leq \alpha(x_k, \varepsilon).$$

On a donc

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(x_k)| + |f(x_k - f(y)| < 2\varepsilon,$$

ce qui démontre la continuité uniforme de f sur $[a, b]$. □

Théorème 2.18 (Stone-Weierstrass)**.** *Toute fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ est limite uniforme d'une suite de polynômes.*

Preuve. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Quitte à remplacer l'intervalle $[a, b]$ par un intervalle plus grand $[c, d]$ et à prolonger f sur $[c, d]$ linéairement sur $[c, a]$ et sur $[b, d]$ en posant $f(c) = f(d) = 0$, on peut supposer que $f(a) = f(b) = 0$. Par un changement de variable, on peut supposer que $a = -\frac{1}{2}$ et $b = \frac{1}{2}$ en posant $g(t) = f\Big((-t + \frac{1}{2})a + (t + \frac{1}{2})b\Big)$, $t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$; ou encore $f(x) = g\Big(\frac{1}{b-a}(x - \frac{b+a}{2})\Big)$, $x \in [a, b]$. Posons maintenant pour tout $n \in \mathbb{N}$ $k_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h_n(t) = (1 - t^2)^n$ si $t \in [-1, 1]$, $h_n(t) = 0$ si $|t| > 1$. On note a_n la quantité $a_n = \int_{-1}^{1} h_n(t)dt$ et $k_n = \frac{1}{a_n} h_n$. On a $k_n \geq 0$ sur $\mathbb{R}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} k_n(t)dt = 1$. De plus,

$$a_n = 2\int_0^1 (1 - t^2)^n dt \geq 2\int_0^1 (1 - t)^n dt = \frac{2}{n + 1}.$$

Ainsi, sur tout intervalle de la forme $[-1, -\delta]$ ou $[\delta, 1]$ avec $0 < \delta < 1$, la suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0. En effet, pour $t \in [-1, 1]$ avec $|t| \geq \delta$, on a

$$|k_n(t)| \leq \frac{1}{a_n}(1 - \delta^2)^n \leq \frac{n + 1}{2}(1 - \delta^2)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

On considère maintenant la fonction p_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned} p_n(x) = (f * k_n)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - t)k_n(t)dt = \int_{-1}^{1} f(x - t)k_n(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)k_n(x - t)dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)k_n(x - t)dt, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Pour $t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, on a pour $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $x - t \in [-1, 1]$, donc $k_n(x - t) = \frac{1}{a_n}(1 - (x - t)^2)^n$. D'où, pour tout $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, on a

$$p_n(x) = \frac{1}{a_n}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)(1 - (x - t)^2)^n dt,$$

ce qui montre que p_n coïncide avec un polynôme de degré $2n$ sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Montrons maintenant que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. On a

$$\begin{aligned} p_n(x) - f(x) &= \int_{-1}^{1} k_n(t)(f(x - t) - f(x))dt \\ &= \int_{-1}^{-\delta} k_n(t)(f(x - t) - f(x))dt + \int_{-\delta}^{\delta} k_n(t)(f(x - t) - f(x))dt \\ &\quad + \int_{\delta}^{1} k_n(t)(f(x - t) - f(x))dt. \end{aligned}$$

Comme sur $[-1, -\delta] \cup [\delta, 1]$, la suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0, et comme f est uniformément continue sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ (car elle y est continue), on en déduit que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ vers f. □

Autre preuve du théorème de Weierstrass. On présente ici la méthode des polynômes de Bernstein. Tout d'abord, quelques résultats techniques, dans le cas $[a,b] = [0,1]$. Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$: d'après le Théorème 2.17, f est uniformément continue sur $[0,1]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$B_n(f)(t) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k t^k (1-t)^{n-k}, \quad t \in [0,1],$$

où C_n^k désigne le coefficient binômial $\frac{n!}{k!(n-k)!}$, $k = 0, 1, ..., n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n(f)$ est un polynôme de degré au plus n. En remarquant que $1 = (t + (1-t))$ et en développant $(t + (1-t))^n$ par la formule du binôme, on remarque que si f est la fonction constante égale à 1, on a $B_n(1)(t) = t$ pour tout $t \in [0,1]$. De même, on montre que pour tout $t \in [0,1]$, $B_n(id)(t) = t$, où $id(t) = t$ et $B_n(c)(t) = \frac{1}{n}\ t + \frac{n-1}{n}\ t^2$, où $c(t) = t^2$. On montre alors la relation suivante

$$\sum_{k=0}^{n} (k-nt)^2 C_n^k t^k (1-t)^{n-k} = nt(1-t), t \in [0,1]. \tag{2.2}$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. D'après la continuité uniforme de f sur $[0,1]$ il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $t, s \in [0,1]$ avec $|t-s| < \alpha$, on a $|(ft) - f(s)| < \varepsilon$. Ainsi, pour $t \in [0,1]$, on note

$$E_{n,t,\alpha} = \left\{ k \in \{0, 1, ..., n\}; \left| \frac{k}{n} - t \right| \geq \alpha \right\}.$$

Soit $F_{n,t,\alpha} = \{0, 1, ..., n\} \setminus E_{n,t,\alpha}$. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k \in E_{n,t,\alpha}} C_n^k t^k (1-t)^{n-k} \quad &\overset{(1)}{\leq} \quad \sum_{k \in E_{n,t,\alpha}} \frac{(k-nt)^2}{n^2\alpha^2} C_n^k t^k (1-t)^{n-k} \\
&\overset{(2)}{\leq} \quad \frac{1}{n^2\alpha^2} \sum_{k=0}^{n} (k-nt)^2 C_n^k t^k (1-t)^{n-k} \\
&\overset{(3)}{\leq} \quad \frac{1}{n^2\alpha^2}\ nt(1-t) \ \overset{(4)}{\leq} \ \frac{1}{4n\alpha^2}.
\end{aligned}$$

La première inégalité provient du fait que pour $k \in E_{n,t,\alpha}$, on a $(k-nt)^2 \geq n^2\alpha^2$. la deuxième inégalité vient de $E_{n,t,\alpha} \subset \{0, 1, ..., n\}$ et tous les termes de la somme sont positifs. L'inégalité (3) vient de l'expression (2.2). Et enfin, la dernière inégalité vient de $\sup_{t \in [0,1]} |t(1-t)| = \dfrac{1}{4}$. On a alors

$$\begin{aligned}
B_n(f)(t) - f(t) \quad &\overset{(1)}{=} \quad \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k t^k (1-t)^{n-k} - f(t) \\
&\overset{(2)}{=} \quad \sum_{k=0}^{n} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t) \right) C_n^k t^k (1-t)^{n-k} \\
&\overset{(3)}{=} \quad \sum_{k \in E_{n,t,\alpha}} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t) \right) C_n^k t^k (1-t)^{n-k} \\
&\qquad + \sum_{k \in F_{n,t,\alpha}} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t) \right) C_n^k t^k (1-t)^{n-k},
\end{aligned}$$

où l'égalité (1) provient uniquement de la définition de $B_n(f)$. L'égalité (2) vient du fait que $B_n(1)(t) = 1$ pour tout $t \in [0,1]$. La troisième égalité vient de la décomposition $\{0, 1, ..., n\} = E_{n,t,\alpha} \cup F_{n,t,\alpha}$, avec

$E_{n,t,\alpha} \cap F_{n,t,\alpha} = \emptyset$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
|B_n(f)(t) - f(t)| &\overset{(1)}{\leq} \sum_{k \in E_{n,t,\alpha}} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t) \right| C_n^k t^k (1-t)^{n-k} \\
&\quad + \sum_{k \in F_{n,t,\alpha}} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t) \right| C_n^k t^k (1-t)^{n-k} \\
&\overset{(2)}{\leq} 2 \sup_{s \in [0,1]} |f(s)| \frac{1}{4n\alpha^2} + \varepsilon \sum_{k \in F_{n,t,\alpha}} C_n^k t^k (1-t)^{n-k} \\
&\overset{(3)}{\leq} \sup_{s \in [0,1]} |f(s)| \frac{1}{2n\alpha^2} + \varepsilon \sum_{k=0}^{n} C_n^k t^k (1-t)^{n-k} \\
&\overset{(4)}{\leq} \sup_{s \in [0,1]} |f(s)| \frac{1}{2n\alpha^2} + \varepsilon.
\end{aligned}$$

La première inégalité provient de l'expression de $B_n(f)(t) - f(t)$ trouvée précédemment. La deuxième inégalité vient de l'inégalité trouvée pour $\sum_{k \in E_{n,t,\alpha}} C_n^k t^k (1-t)^{n-k}$ et du fait que pour $k \in F_{n,t,\alpha}$, on a $|\frac{k}{n} - t| < \alpha$, et donc $|f(\frac{k}{n}) - f(t)| < \varepsilon$. La troisième inégalité vient de $F_{n,t,\alpha} \subset \{0, 1, ..., n\}$. Enfin, la dernière inégalité vient de $B_n(1)(t) = 1$ pour tout $t \in [0,1]$. Ainsi, on peut choisir $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $\sup_{s \in [0,1]} |f(s)| \frac{1}{2n\alpha^2} \leq \varepsilon$: n_0 ne dépend que de ε. On a alors pour tout $t \in [0,1]$, $|B_n(f)(t) - f(t)| \leq 2\varepsilon$, ce qui montre la convergence uniforme de $(B_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ vers f sur $[0,1]$. Dans le cas où f est continue sur un intervalle $[a,b]$ quelconque, on pose $g(t) = f(a + (b-a)t)$ pour $t \in [0,1]$: g est continue sur $[0,1]$ et vérifie $f(x) = g(\frac{x-a}{b-a})$ pour $x \in [a,b]$. On applique alors le résultat précédent à g et en posant $P_n(x) = B_n(g)(\frac{x-a}{b-a})$, $x \in [a,b]$, $n \in \mathbb{N}$, on montre facilement que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f dans $[a,b]$. $\square$

2.4 Séries de fonctions

Le lien entre suites et séries de fonctions est le même qu'entre suites et séries numériques. Dans tout ce paragraphe, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ (ouvert ou non, fermé ou non, borné ou non).

Définition 2.19. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes, définies sur I. On appelle série de terme général f_n et on note $\sum f_n$ la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$, où $\varphi_n(t) = \sum_{k=0}^{n} f_k(t)$, $t \in I$ est la somme partielle d'ordre n.

Définition 2.20. On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement (respectivement uniformément) sur I si la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement (respectivement uniformément) sur I.

La convergence simple de $\sum f_n$ revient à la convergence de la série numérique $\sum f_n(t)$ pour tout $t \in I$. Lorsqu'il y a convergence simple, on note $\varphi : I \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ la fonction définie par $\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_n(t)$ pour $t \in I$, et on l'appelle somme de la série $\sum f_n$.

Proposition 2.21. *Une série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I si et seulement si elle est uniformément de Cauchy, c'est-à-dire : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $p, q \geq N$, $p \leq q$, on a $\sup_{t \in I} \left| \sum_{k=p}^{q} f_k(t) \right| \leq \varepsilon$.*

Preuve. Il suffit de voir que le critère de Cauchy uniforme pour la série de fonctions $\sum f_n$ est le même que le critère de Cauchy uniforme (Théorème 2.10) pour la suite des sommes partielles $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En effet, on a $\varphi_q(t) - \varphi_{p-1}(t) = \displaystyle\sum_{k=p}^{q} f_k(t)$ pour tout $t \in I$. □

Exemple 2.22. Soit $f_n(t) = t^n$ pour $t \in]-1, 1[$. Pour tout $t \in]-1, 1[$, la série $\sum f_n(t)$ converge vers $\frac{1}{1-t}$. La convergence est uniforme sur tout intervalle du type $[-a, a]$ avec $0 < a < 1$.

Corollaire 2.23. *Si une série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I, alors la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle.*

Preuve. Il suffit d'écrire le critère de Cauchy uniforme pour $p = q$. □

Les deux résultats suivants donnent des conditions suffisantes pour vérifier qu'une série de fonctions converge uniformément.

Proposition 2.24 (Convergence normale)**.** *Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur I telle que pour tout $t \in I$, $|f_n(t)| \le a_n$. On suppose que la série numérique $\sum a_n$ est convergente. Alors la série de fonctions $\sum f_n$ est uniformément convergente.*

Preuve. Il suffit d'appliquer le critère de Cauchy uniforme pour la série $\sum f_n$. En effet, on a

$$\sup_{t\in I}\left|\sum_{k=p}^{q} f_k(t)\right| \le \sum_{k=p}^{q}\sup_{t\in I}|f_k(t)| \le \sum_{k=p}^{q} a_k \xrightarrow[p,q\to\infty]{} 0,$$

ce qui montre, d'après la Proposition 2.21, que $\sum f_n$ converge uniformément sur I. □

Exemple 2.25. Soit $n \ge 1$. Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(t) = \frac{\sin nt}{n^2}$, $t \in \mathbb{R}$. On a, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\left|\frac{\sin nt}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$. Comme la série $\sum_{n\ge 1}\frac{1}{n^2}$ est convergente, la série $\sum_{n\ge1} f_n$ converge normalement, donc uniformément sur $\mathbb{R}$.

Théorème 2.26 (Règle d'Abel uniforme)**.** *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies de I dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire $f_n = g_n h_n$ avec*

(i) pour tout $t \in I$, la suite réelle $(g_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante ;

(ii) la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 ;

(iii) il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\displaystyle\sup_{t\in I}\left|\sum_{k=0}^{n} h_k(t)\right| \le M$.

Alors la série $\sum f_n$ converge uniformément sur I.

Preuve. On va montrer que le critère de Cauchy uniforme est satisfait en utilisant la transformation d'Abel comme dans le cas des séries numériques. On a pour tout $t \in I$

$$\sum_{k=1}^{p} f_{n+k}(t) = \sum_{k=1}^{p}(g_{n+k}(t) - g_{n+k+1}(t))H_{n+k}(t) - g_{n+1}(t)H_n(t) + g_{n+p+1}(t)H_{n+p}(t),$$

où $H_n = \sum_{k=0}^{n} h_k$ $(n \in \mathbb{N})$ est la somme partielle de $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a alors pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{k=1}^{p} f_{n+k}(t)\right| \\
&\overset{(1)}{\le} \sum_{k=1}^{p}|g_{n+k}(t) - g_{n+k+1}(t)||H_{n+k}(t)| + |g_{n+1}(t)||H_n(t)| + |g_{n+p+1}(t)||H_{n+p}(t)| \\
&\overset{(2)}{\le} M\left(\sum_{k=1}^{p}(g_{n+k}(t) - g_{n+k+1}(t)) + g_{n+1}(t) + g_{n+p+1}(t)\right) = 2M\, g_{n+1}(t).
\end{aligned}$$

La première inégalité provient de l'inégalité triangulaire. La deuxième inégalité provient de l'hypothèse (iii) du théorème, et du fait que les hypothèses (i) et (ii) impliquent que $g_n(t) \geq 0$ et $g_k(t) - g_{k+1}(t) \geq 0$ pour tout $t \in I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, on a

$$\sup_{t\in I} \left| \sum_{k=1}^{p} f_{n+k}(t) \right| \leq 2M \sup_{t\in I} g_{n+1}(t) \xrightarrow[n,p\to\infty]{} 0$$

d'après l'hypothèse (ii). □

Dans la suite, nous étudions comment les propriétés des fonctions f_n (continuité, dérivabilité) sont conservées par la série $\sum f_n$ lorsqu'elle converge.

Théorème 2.27 (Continuité)**.** *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur un intervalle I telle que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur I. Alors la somme de la série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est continue sur I.*

Preuve. Appliquer le Théorème 2.11 à la suite des sommes partielles $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

Théorème 2.28 (Intégrabilité)**.** *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I, continues sur un intervalle $[a,b] \subset I$ telle que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur I. Alors la série numérique $\sum \left(\int_a^b f_n(t)dt\right)$ est convergente et on a*

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_a^b f_n(t)dt\right)$$

Preuve. Appliquer le Théorème 2.12 à la suite des sommes partielles $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

Théorème 2.29 (Dérivabilité)**.** *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I telle que la série $\sum f_n'$ converge uniformément vers g sur I et la série $\sum f_n$ converge simplement vers f sur I. Alors f est de classe $\mathscr{C}^1(I)$ et $f' = g$ sur I.*

Preuve. Appliquer le Théorème 2.13 à la suite des sommes partielles $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

Exemple 2.30. On reprend l'Exemple 2.25 : pour $n \geq 1$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par $f_n(t) = \frac{\sin nt}{n^2}$, $t \in \mathbb{R}$: la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$, la somme est donc continue d'après le théorème sur la continuité ci-dessus car f_n est continue sur $\mathbb{R}$. Pour tout $n \geq 1$, f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ et on a $f_n'(t) = \frac{\cos nt}{n}$ pour $t \in \mathbb{R}$.La série $\sum f_n(2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, est divergente ($f_n(2k\pi) = \frac{1}{n}$). D'autre part, on a vu que pour $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, la série $\sum \frac{\cos nt}{n}$ est convergente : voir Exemples 1.42 pour $\alpha = 1$. On peut montrer, grâce au théorème d'Abel uniforme, que la série $\sum f_n'$ est uniformément convergente sur tout intervalle du type $[2k\pi + \varepsilon, 2(k+1)\pi - \varepsilon]$ pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $k \in \mathbb{Z}$. Ainsi, on peut en déduire que la somme de la série $\sum f_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

Chapitre 3

Séries entières

3.1 Rayon de convergence

Définition 3.1. On appelle série entière de la variable complexe toute série de la forme $\sum f_n$ où $f_n(z) = a_n z^n$, $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, avec $a_n \in \mathbb{C}$.

Exemple 3.2. La série $\sum z^n$ est une série entière ($a_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

Théorème 3.3 (Lemme d'Abel)**.** *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite complexe $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| < |z_0|$, la série complexe $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.*

Preuve. Par hypothèse, il existe $M > 0$ tel que $|a_n z_0^n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si $z_0 = 0$, le résultat est trivial. Supposons donc $z_0 \neq 0$. Alors on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|a_n z^n| \leq M \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$. Pour $|z| < |z_0|$, $\left|\frac{z}{z_0}\right| < 1$, donc la série $\sum \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$ est convergente. Par comparaison, on a donc que la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente. □

Corollaire 3.4. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la série $\sum a_n z_0^n$ est convergente. Alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.*

Preuve. Il suffit de remarquer que, comme la série $\sum a_n z_0^n$ est convergente, la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, donc est bornée. On applique alors le lemme d'Abel. □

Théorème 3.5. *À toute série entière $\sum a_n z^n$, on peut associer un unique réel positif R (éventuellement, $R = +\infty$) vérifiant*

(i) si $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < R$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente ;

(ii) si $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| > R$, la série $\sum a_n z^n$ est divergente.

On appelle R le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$.

Preuve. On note $A = \{r > 0; (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ bornée}\}$: $A \neq \emptyset$ car $0 \in A$. Si A n'est pas majorée, il est clair qu'on peut prendre $R = +\infty$ d'après le lemme d'Abel. Si A est majoré, on note $R = \sup A$. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$: il existe $r \in A$ tel que $|z| < r \leq R$. D'après le lemme d'Abel, on a alors que $\sum a_n z^n$ est absolument convergente. Supposons maintenant que $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| > R$. Alors la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée (sinon $|z| \in A$), et donc la série $\sum a_n z^n$ est divergente. □

Exemple 3.6. En reprenant l'exemple 3.2, on voit facilement que le rayon de convergence de la série $\sum z^n$ vaut $R = 1$.

Proposition 3.7 (Formule d'Hadamard)**.** *Le rayon de convergence R d'une série entière $\sum a_n z^n$ vérifie l'égalité*

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}},$$

en adoptant la convention $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{\infty} = 0$.

Preuve. Si $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = +\infty$, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, donc la série entière $\sum a_n z^n$ n'est pas convergente. Ainsi, $R = 0$.
Supposons maintenant que $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = 0$. Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors on a

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n z^n|^{\frac{1}{n}} = \Big(\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}\Big)|z| = 0 < 1,$$

et donc d'après la règle de Cauchy pour les séries numériques, la série entière $\sum a_n z^n$ est absolument convergente ; son rayon de convergence vaut $+\infty$.
Soit maintenant $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \ell \in]0, +\infty[$. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\ell|z| < 1$. Alors on a

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n z^n|^{\frac{1}{n}} = \Big(\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}\Big)|z| = \ell|z| < 1,$$

et donc d'après la règle de Cauchy pour les séries numériques, la série entière $\sum a_n z^n$ est absolument convergente. Si $z \in \mathbb{C}$ vérifie $\ell|z| > 1$, on a

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n z^n|^{\frac{1}{n}} = \Big(\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}\Big)|z| = \ell|z| > 1,$$

et donc d'après la règle de Cauchy pour les séries numériques, la série entière $\sum a_n z^n$ est divergente. □

Proposition 3.8 (Critère de d'Alembert)**.** *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes non nuls. Supposons que $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ existe (on note ℓ cette limite). Alors le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ vaut $R = \frac{1}{\ell}$ (avec la même convention que dans le théroème d'Hadamard).*

Preuve. On applique la règle de d'Alembert (Théorème 1.31) à la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $z \neq 0$: si $|z| < \frac{1}{\ell}$, alors $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \ell|z| < 1$: la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente ; si $|z| > \frac{1}{\ell}$, alors $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \ell|z| > 1$: la série $\sum a_n z^n$ est divergente. D'où, par définition du rayon de convergence, $R = \frac{1}{\ell}$. □

Proposition 3.9. *Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence R et R'. Alors $\sum(a_n + b_n)z^n$ est une série entière de rayon de convergence $R'' \geq \min\{R, R'\}$ et pour $|z| < \min\{R, R'\}$, on a*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

D'autre part, la série produit $\sum\left(\sum_{k=0}^{n}(a_k b_{n-k})\right)z^n$ est une série entière de rayon de convergence $\tilde{R} \geq \min\{R, R'\}$ et pour $|z| < \min\{R, R'\}$, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(a_k b_{n-k})\right)z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right).$$

Preuve. Évident pour la somme si on applique la Proposition 1.14. Pour le produit, raisonner sur les sommes partielles. □

Théorème 3.10. *Une série entière et sa série entière dérivée ont même rayon de convergence.*

Preuve. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. On appelle série entière dérivée la série entière $\sum b_n z^n$ où $b_n = (n+1)a_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Soit $\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$. Alors on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|b_n|^{\frac{1}{n}} = |a_{n+1}|^{\frac{1}{n}}(n+1)^{\frac{1}{n}}.$$

Comme $\lim_{n\to\infty}(n+1)^{\frac{1}{n}} = 1$, on a $\limsup_{n\to\infty} |b_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{R}$. □

3.2 Propriétés de la somme - Fonctions développables en série entière

Dans tout ce paragraphe, $\sum a_n z^n$ désigne une série entière de rayon de convergence R. On note $f : \{z \in \mathbb{C}; |z| < R\} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$; f est appelée somme de la série $\sum a_n z^n$.

Théorème 3.11. *Soit $0 < r < R$. Alors la série $\sum f_n$ (où $f_n(t) = a_n t^n$, $t \in \mathbb{R}$) converge uniformément vers f sur $[-r, r]$.*

Preuve. Pour tout $t \in [-r, r]$, on a $|f_n(t)| = |a_n t^n| \leq |a_n| r^n$. Comme la série $\sum a_n r^n$ converge (car $r < R$), la série $\sum f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[-r, r]$ vers f. $\square$

Corollaire 3.12. *La somme d'une série entière est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur son intervalle de convergence.*

Preuve. Soit $t_0 \in]-R, R[$. Soit $r = \frac{R+|t_0|}{2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $[-r, r]$, et la série $\sum f_n$ converge uniformément vers f sur $[-r, r]$. Donc d'après le Théorème 2.27, f est continue en t_0. Comme la série dérivée a le même rayon de convergence que $\sum a_n z^n$, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur en t_0 et on a $f'(t_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1}$. On peut bien sûr itérer ce raisonnement (on fait une récurrence) pour finalement trouver que pour tout $k \in \mathbb{N}$, f est de classe $\mathscr{C}^k$ en t_0. $\square$

Corollaire 3.13. *Soit $p \in \mathbb{N}$ et $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, de somme f. Alors f admet $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k t^k$ pour développement limité à l'ordre p au voisinage de 0.*

Preuve. En effet, on a pour $t \neq 0$ au voisinage de 0 ($t \in [-\frac{R}{2}, \frac{R}{2}]$)

$$\frac{1}{t^p}\left(f(t) - \sum_{k=0}^{p} a_k t^k\right) = \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n t^{n-p} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+p} t^n \xrightarrow[t \to 0]{} 0$$

car la série $\sum_{n \geq 1} a_{n+p} t^n$ converge uniformément au voisinage de 0 (on peut donc intervertir les signes $\sum$ et lim. $\square$

Exemple 3.14. La série entière de terme général $\frac{1}{n}$, $n \geq 1$ a pour rayon de convergence 1. On note $f : \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ la fonction somme. Sur son disque de convergence, f est dérivable et sa dérivée vaut $f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$. Ainsi, sur $]-1, 1[$, $f'(t) = \frac{1}{1-t}$, ce qui donne, après intégration, compte tenu du fait que $f(0) = 0$: $f(t) = \ln(1-t)$.

Définition 3.15. On dit qu'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ (pour $a < b$) est développable en série entière au voisinage de $c \in]a, b[$ s'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ telle que il existe $r > 0$ avec

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t-c)^n, \qquad \text{pour } t \in]c-r, c+r[\cap [a, b].$$

Théorème 3.16. *Soit f une fonction développable en série entière au voisinage de 0. Alors il existe $r > 0$ tel que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r, r[$, la série entière $\sum \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) z^n$ a pour rayon de convergence $R \geq r$ et*

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) t^n, \quad |t| < r.$$

Preuve. Soit f développable en série entière au voisinage de 0. D'après la définition, il existe $\rho > 0$ et une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R \geq \rho$ tels que pour tout $t \in]-\rho, \rho[$, on a $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$. En $t = 0$: $f(0) = a_0$. D'après le Corollaire 3.12, on a $f'(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} t^n$ pour tout $z \in]-\rho, \rho[$. En particulier, en $t = 0$, on a $f'(0) = a_1$. En itérant ce raisonnement pour toutes les dérivées (et donc en faisant un raisonnement par récurrence), on obtient $f^{(n)}(0) = n! a_n$. Ce qui nous donne bien le résultat. $\square$

Ainsi, pour qu'une fonction soit développable en série entière, il est nécessaire qu'elle soit de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 0 et que le rayon de convergence de la série $\sum \frac{f^{(n)}(0}{n!} z^n$ soit non nul. Ceci n'est pas suffisant comme on peut le voir dans l'exemple suivant.

Exemple 3.17. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(t) = \exp\left(-\frac{1}{t^2}\right)$ si $t \neq 0$. Cette fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$.

Théorème 3.18. *Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r, r[$ est développable en série entière au voisinage de 0 s'il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f^{(n)}(t)| \leq M$ pour tout $t \in]-r, r[$.*

Preuve. D'après Taylor-Lagrange avec reste intégral, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in]-r, r[$

$$f(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) t^k = \int_0^t \frac{(t-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(u) du = t^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-v)^n}{n!} f^{(n+1)}(tv) dv,$$

ce qui donne

$$\left| f(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) t^k \right| \leq M \frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Ainsi, la série entière $\sum \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) z^k$ est absolument convergente pour tout $z \in \mathbb{C}$ et coïncide avec $f(t)$ lorsque $z = t \in]-r, r[$. □

Remarque 3.19. Le théorème précédent nous donne une manière de prolonger une fonction f définie a priori sur $]-r, r[$ en une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{C}$ tout entier.

Exemple 3.20. Pour $t \in \mathbb{R}$, on a $\exp(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$. En effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|t| < 1$, $\exp^{(n)}(t) = \exp(t) \leq e$. Ceci permet de définir l'exponentielle complexe par $\exp(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, pour tout $z \in \mathbb{C}$. Ainsi, on a le développement en série entière des fonctions sinus et cosinus en remarquant que pour $t \in \mathbb{R}$, $\sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})$ et $\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$.

3.3 Comportement sur le bord du disque de convergence

Dans ce paragraphe, on étudie le comportement d'une série entière sur le bord de son disque de convergence.

Théorème 3.21 (Convergence radiale)**.** *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On suppose qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|z_0| = R$ et $\sum a_n z_0^n$ est convergente. Alors on a*

$$\lim_{t\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n.$$

Preuve. Si $z_0 = 0$, le résultat est évident. On suppose donc $z_0 \neq 0$. Par la transformation $u = \frac{z}{z_0}$, on peut se ramener au cas d'une série entière $\sum a_n u^n$ de rayon de convergence égal à 1 telle que la série $\sum a_n$ est convergente. Pour $t \in [0, 1]$, pour $p, q \in \mathbb{N}$ avec $p \leq q$, on a grâce à la transformation d'Abel

$$\sum_{n=p}^{q} a_n t^n = \sum_{n=p}^{q-1} A_{n,p}(t^n - t^{n+1}) + A_q t^q,$$

où $A_{n,p} = \sum_{k=p}^{n} a_k$, $n \geq p$. Comme la série $\sum a_n$ est convergente, on en déduit que

$$\left| \sum_{n=p}^{q} a_n t^n \right| \leq \left(\sup_{p\leq n\leq q-1} |A_{n,p}| \right) (t^p - t^q) + |A_{q,p}| t^q \leq \sup_{p\leq n\leq q} |A_{n,p}| \xrightarrow[p,q\to\infty]{} 0.$$

Ainsi, la série $\sum a_n t^n$ satisfait le critère de Cauchy uniforme. Elle converge donc uniformément sur $[0, 1]$: on peut échanger le signe $\sum$ et la limite $\lim\limits_{t\to 1^-}$, ce qui donne le résultat. □

Exemple 3.22. La série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente. Le rayon de convergence de $\sum \frac{(-1)^n}{n} z^n$ vaut 1 et sa série dérivée vaut $\sum (-1)^n z^{n-1}$, dont la somme vaut $\frac{-1}{1+z}$. Ainsi, pour tout $t \in]-1,1[$, on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} t^n = -\ln(1+t)$ (en ajustant les valeurs en 0). Le théorème précédent (en prenant la limite lorsque t tend vers 1^-) nous donne donc une preuve de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$.

Le résultat suivant énonce une réciproque, sous certaines conditions, de ce résultat.

Théorème 3.23 (Convergence au sens de Poisson)**.** *Soit $\sum a_n$ une série à terme dans $\mathbb{C}$. On suppose que la série entière $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence égal à 1 ; on note $f(z)$ sa somme pour $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$. On suppose de plus que $\lim_{\mathbb{R} \ni t \to 1^-} f(t)$ existe. Alors si $a_n \in [0, +\infty[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ou si $n a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, la série $\sum a_n$ est convergente et $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{\mathbb{R} \ni t \to 1^-} f(t)$.*

Remarque 3.24. Le résultat est faux sans hypothèse sur les coefficients $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la série, comme le montre $\sum (-1)^n z^n$: la somme de cette série pour $|z| < 1$ est $\frac{1}{1+z}$, $\lim_{\mathbb{R}\ni t \to 1^-} \frac{1}{1+t} = \frac{1}{2}$, mais la série $\sum (-1)^n$ n'est pas convergente.

Preuve. On pose
$$\ell = \lim_{\mathbb{R} \ni t \to 1^-} f(t).$$
Supposons d'abord que $a_n \in [0, +\infty[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto a_n t^n$ est croissante sur $[0, 1[$ (car $a_n \geq 0$), donc f est croissante sur $[0, 1[$. Ainsi, on a pour tout $t \in [0, 1[$ et pour tout $N \in \mathbb{N}$:
$$\sum_{n=0}^{N} a_n t^n \leq f(t) \leq \ell.$$
En fixant N et en faisant tendre t vers 1^-, on obtient alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_n \leq \ell$ pour tout $N \in \mathbb{N}$. Ainsi, la suite des sommes partielles $(\sum_{n=0}^{N} a_n)_{N\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante majorée ; elle est donc convergente. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| \leq 1$, on a $|a_n z^n| \leq a_n$. Comme $\sum a_n$ est convergente, la série entière $\sum a_n z^n$ converge normalement, donc uniformément sur $\{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}$. On peut donc échanger les signes $\sum$ et limite, d'où $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \ell$.

Supposons maintenant que $n a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. On a $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \ell$. On a
$$f\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \sum_{k=0}^{n} a_k = -\sum_{k=1}^{n} a_k \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k\right) + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k.$$
Comme $n a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $|a_n| \leq \frac{\varepsilon}{n}$. Ainsi, pour tout $n \geq n_0$, on a
$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \right| &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{k} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \\ &\leq \frac{\varepsilon}{n} \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \\ &\leq \frac{\varepsilon}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k = \varepsilon. \end{aligned}$$

D'autre part, pour tout $t \in [0,1]$ et tout $k \geq 1$, on a de plus

$$(1-t)^k = (1-t)(1+t+...+t^{k-1}) \leq k(1-t).$$

Ainsi, on a pour $n \geq n_0$

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{n} a_k \left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^k\right)\right| &\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k|a_k| \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0} k|a_k| + \frac{1}{n}\sum_{k=n_0+1}^{n} k|a_k| \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0} k|a_k| + \varepsilon\ \frac{n-n_0}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \varepsilon.
\end{aligned}$$

D'où le résultat. $\square$